Physik-Formelsammlung für Theo B

Version 0.2

Michael „Serpedon“ Walz

Sommersemester 2007

Inhaltsverzeichnis

Diese Formelsammlung wurde während der Vorbereitung auf die Klausur der Theoretischen Physik B an der Universität Karlsruhe erstellt und erhebt keine Anspruch auf Vollständigkeit oder Korrektheit. Anmerkungen und Ergänzungen sind immer gerne gesehen: http://serpedon.de

1 Zwangbedingungen

Holonome Zwangsbedingungen lassen sich in der folgenden Form schreiben:

$$f(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_N, t) = 0$$

Skleronome Zwangsbedingungen sind zeit*un*abhängig.

Rheonome Zwangsbedingungen sind zeitabhängig.

2 D'Alembert-Prinzip

Das D'Alembert-Prinzip (oft auch Prinzip der *virtuellen Verrückungen* genannt) lautet:

$$\boxed{\sum_i \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i = 0}$$

Die Verrückung erfolgt bei konstanter Zeit t.

3 Lagrangeformalismus

3.1 Lagrangefunktion mit skalares Potential V

$$\mathcal{L} = T - V$$

3.2 Lagrangefunktion mit Vektorpotential $\vec{A}$ für B-Felder

$$\boxed{\mathcal{L} = T - q \cdot \Phi + q \cdot \vec{A} \cdot \dot{\vec{r}}}$$

Die 2. Maxwell'sche Gleichung lautet :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 = \vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$$

$$\Rightarrow \exists \Phi : \qquad -\vec{\nabla}\, \Phi = \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Wenn das Vektorpotential $\vec{A}$ zeitabhängig ist, so hängt das elektrische Potential Φ von $\vec{A}$ ab.

3.3 Lagrange'sche Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0$$

3.4 Lagrange-Multiplikatoren

Wenn die Zwangsbedingung $Z(\vec{q}, t) = 0$ lautet, gilt für den Lagrange-Multiplikator λ:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \lambda \cdot Z$$

3.4.1 Generalisierte Kräfte

Der Zusammenhang zwischen den generalisierten Kräfte $\vec{Q}$, den physikalischen Kräften $\vec{F}$ und dem Lagrange-Multiplikator λ ist:

$$\boxed{Q_k = \lambda \cdot \frac{\partial Z}{\partial q_k} = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k}}$$

3.4.2 Geschwindigkeitsabhängige Potentiale

Normalerweise lassen sich die generalisierten Kräfte als $Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k}$ darstellen. Wenn sich die generalisierten Kräfte in der Form

$$\boxed{Q_k = -\frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k}}$$

darstellen lassen, so können wir in der Lagrangefunktion $\mathcal{L} = T - V$ einfach $V = U$ setzen.

4 Variationsproblem

Ist ein Funktional J gegeben, das jeder Funktion $F(\vec{y}, \vec{y'}, x)$ einen Wert zuordnet,

$$J[F] = \int_{x_1}^{x_2} F(\vec{y}, \vec{y'}, x)dx$$

so ist J extremal, wenn F die Euler-Lagrange-Gleichung erfüllt:

$$\delta J = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'_k} - \frac{\partial F}{\partial y_k} = 0 \quad \forall k$$

Hierbei hat man entweder feste Randwerte gegeben,

$$\vec{y}(x_1) = \vec{y}_1 = \text{const.} \qquad \vec{y}(x_2) = \vec{y}_2 = \text{const.}$$

oder die partiellen Ableitung am Rand müssen verschwinden:

$$\frac{\partial F}{\partial y'_k}\Big(\vec{y}(x_1), \vec{y'}(x_1), x_1\Big) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'_k}\Big(\vec{y}(x_2), \vec{y'}(x_2), x_2\Big) = 0$$

4.1 Nebenbedingungen

Soll J extremal werden, aber die Nebenbedingung $G(\vec{y}, x) = 0$ beachtet werden, so wendet man die Methode der Lagrange-Multiplikatoren an:

$$F' = F + \lambda \cdot G$$

4.2 Hamiltonsches Prinzip

Das allgemeine Variationsproblem geht in den Lagrangeformalismus über für

$$\begin{array}{ccc} F \to \mathcal{L} & J \to S & G \to Z \\ \vec{y} \to \vec{q} & x \to t & \end{array}$$

Dies nennt man *Hamiltonsches Prinzip*. Es fordert, dass das Wirkungsfunktional S stationär ist:

$$\delta S = 0 \qquad S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)dt$$

5 Erhaltungsgrößen

5.1 Kanonische Impulse

Der *kanonische Impuls* p (auch *verallgemeinerte Impuls*) zu einer Koordinate q_k ist erhalten, wenn q_k zyklisch ist:

$$p_{q_k} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \quad \text{erhalten} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad q_k \text{ ist zyklisch}$$

5.1.1 Begründung

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}}_{p_{q_k}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}$$

5.2 Hamiltonfunktion

Die Hamiltonfunktion ist erhalten, wenn die Lagrangefunktion nicht von der Zeit abhängt:

$$\mathcal{H} = \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - \mathcal{L} \quad \text{erhalten} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$$

5.2.1 Begründung

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{H} &= \sum_k \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\right)\dot{q}_k + \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\frac{d}{dt}\dot{q}_k \qquad \underbrace{-\frac{d}{dt}\mathcal{L}}_{-\sum \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}\dot{q}_k - \sum \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\frac{d}{dt}\dot{q}_k - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}} \\
&= \sum_k \dot{q}_k \left(\underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}}_{=0}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}
\end{aligned}$$

5.3 Noethertheorem

Gilt für eine Transformation $t \to t^*(\vec{q}_k, \dot{\vec{q}}_k, t)$, $q_k \to q_k^*(\vec{q}_k, \dot{\vec{q}}_k, t)$ die Invarianzbedingung

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \epsilon}\left[\mathcal{L}\left(\vec{q}^*, \frac{d\vec{q}^*}{dt^*}, t^*\right)\frac{dt^*}{dt}\right]_{\epsilon=0} = \frac{d}{dt}f(\vec{q}, t)}$$

so ist die Noetherladung Q erhalten:

$$\boxed{Q = \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\Psi_k - \underbrace{\left(\sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - \mathcal{L}\right)}_{\mathcal{H}}\varphi - f(\vec{q}, t)}$$

Dabei sind die Funktionen φ und Ψ_k die partiellen Ableitungen der Transformationen nach dem kleinen Parameter ϵ:

$$\varphi = \frac{\partial}{\partial \epsilon}t^*(\vec{q}_k, \dot{\vec{q}}_k, t)$$

$$\Psi_k = \frac{\partial}{\partial \epsilon}q_k^*(\vec{q}_k, \dot{\vec{q}}_k, t)$$

5.3.1 Symmetrien

$$\begin{array}{rcl} \text{Homogenität der Zeit} & \rightarrow & \text{Energieerhaltung} \\ \text{Homogenität des Raumes} & \rightarrow & \text{Impulserhaltung} \\ \text{Isotropie des Raums} & \rightarrow & \text{Drehimpulserhaltung} \end{array}$$

6 Eulersche Gleichungen

$$\boxed{\Theta_1 \dot{\omega}_1 + (\Theta_3 - \Theta_2)\,\omega_2\omega_3 = M_1}$$

Die zweite und dritte Gleichung folgen aus der ersten durch zyklisches Vertauschen der Indizes.

$$\Theta_2 \dot{\omega}_2 + (\Theta_1 - \Theta_3)\,\omega_3\omega_1 = M_2 \qquad \Theta_3 \dot{\omega}_3 + (\Theta_2 - \Theta_1)\,\omega_1\omega_2 = M_3$$

7 Trägheitstensor

$$\begin{aligned} \hat{\Theta} &= \sum_k m_k \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -yx & x^2+z^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2+y^2 \end{pmatrix} \\ &= \sum_k m_k \underbrace{\begin{pmatrix} r^2-x^2 & -xy & -xz \\ -yx & r^2-y^2 & -yz \\ -zx & -zy & r^2-z^2 \end{pmatrix}}_{\text{alle Größen mit Indizes } k} = \left(\sum_k m_k \left(r_k^2 \delta_{ij} - x_i^k x_j^k \right) \right)_{ij} \end{aligned}$$

7.1 Drehimplus, Rotationsenergie

$$\vec{L} = \hat{\Theta} \cdot \vec{\omega} \qquad T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \vec{\omega}^{\mathrm{T}} \hat{\Theta}\, \vec{\omega}$$

7.2 Steiner'scher Satz

Ist Θ_S das Trägheitsmoment um eine Achse durch den Schwerpunkt S, so gilt für das Trägheitsmoment Θ_d um eine *parallele* Achse im Abstand d:

$$\Theta_d = \Theta_S + M \cdot d^2$$

8 Hamiltonformalismus

Im Hamiltonformalismus werden alle $\dot{q}_k$ durch die kanonischen Impulse p_k ausgedrückt und wir erhalten doppelte so viele Gleichungen wie beim Lagrangeformalismus; dafür aber nur noch Differentialgleichungen 1. Ordnung.

$$p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \qquad \mathcal{H} = \sum_k p_k \cdot \dot{q}_k(\vec{q}, \vec{p}, t) - \mathcal{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}(\vec{q}, \vec{p}, t), t)$$

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \qquad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}$$

8.1 Erhaltungsgrößen

Die Hamiltonfunktion $\mathcal{H}$ ist erhalten, wenn sie nicht von der Zeit t abhängt.

$$\mathcal{H} \quad \text{erhalten} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0$$

8.1.1 Begründung

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H} \underbrace{=}_{\text{vgl. Punkt 5.2.1}} -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \underbrace{=}_{\text{vgl. Punkt 8}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$$

8.2 Prinzip der minimalen Kopplung

In kartesichen Koordinaten gilt allgemein:

$$\mathcal{H} = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r)$$

Prinzip der minimalen Kopplung:

In Gegenwart eines magnetischen Feldes ersetze $\vec{p}$ durch $\vec{p} - q\vec{A}$ in $\mathcal{H}$.

$$\vec{p} \quad \rightarrow \quad \vec{p} - q\vec{A} \qquad q\text{: Probeladung}$$

Wofür ist das gut?!? Weiß das jemand?!?