

Versuchsauswertung P1-12: Schwingungen, Resonanzverhalten

Michael Walz, Kathrin Ender
Gruppe 10

29. November 2007

Inhaltsverzeichnis

1	Drehpendel, freie Schwingung	2
2	Drehpendel, freie gedämpfte Schwingung	3
3	Drehpendel, Winkelrichtgröße D^*	6
4	Drehpendel, erzwungene Schwingung	7
5	Schwingkreis, erzwungene Schwingung	9
5.1	Stromstärke und Impedanz	10
5.2	Resonanzüberhöhung	11
5.3	Phasenverschiebung	12

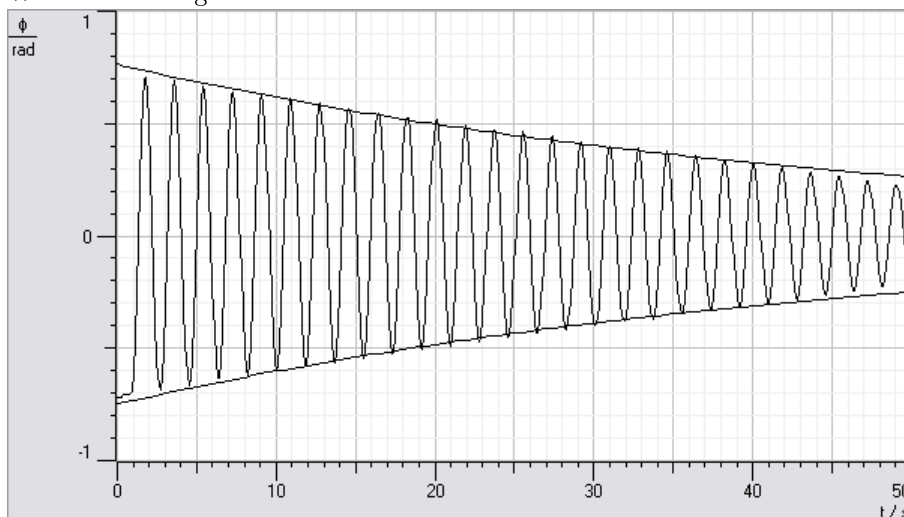
1 Drehpendel, freie Schwingung

Um sich mit CASSY vertraut zu machen, sollte zunächst der zeitliche Verlauf des Phasenwinkels, der Winkelgeschwindigkeit und der kinetischen Energie ohne Wirbelstrombremse aufgenommen werden. Tatsächlich gemessen wird in diesem Versuch nur die Auslenkung s . In CASSY wurden die gesuchten Größen definiert, so dass diese direkt angezeigt werden konnten. Es gilt:

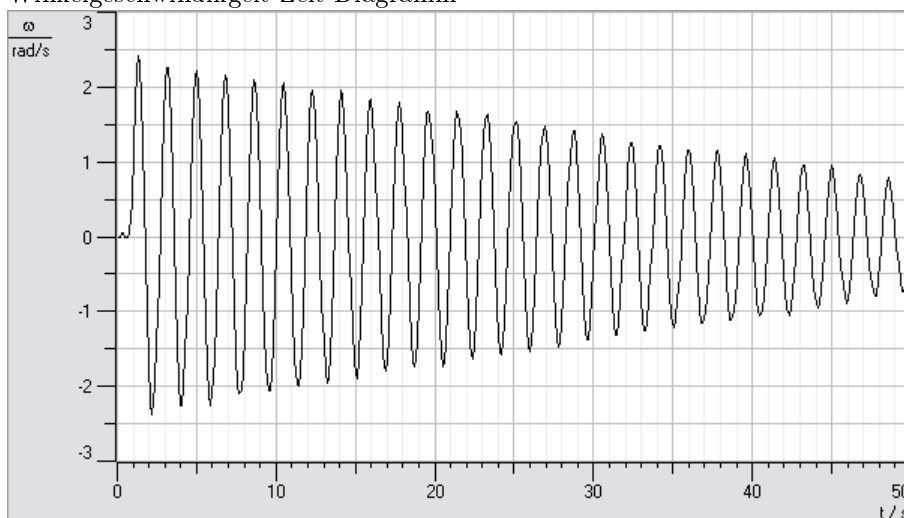
- Auslenkungswinkel: $\varphi = s/r$, wobei r der Außenradius des Drehpendels ist
- Winkelgeschwindigkeit: CASSY kann die zeitliche Ableitung einer Messgröße automatisch berechnen
- kinetische Energie: $E_{kin} = 1/2 \cdot \Theta \cdot \dot{\varphi}^2$ mit dem in der Vorbereitung berechneten Trägheitsmoment $\Theta = 1,4 \cdot 10^{-3} \text{kg} \cdot \text{m}^2$
- Phasenraumdiagramm: Winkelgeschwindigkeit über Winkel

Es ergaben sich die folgenden Darstellungen, die wir aus den Messdaten zu Hause mit einer CASSY-Demoversion erstellten:

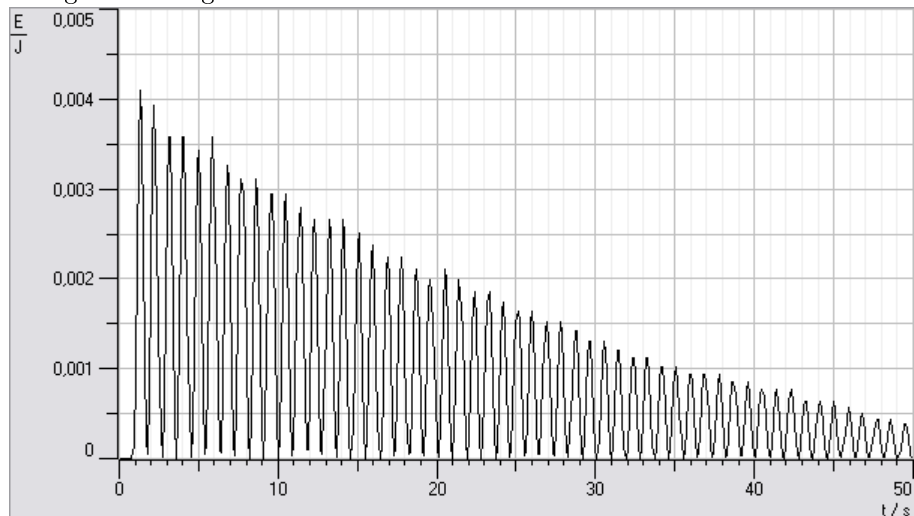
Winkel-Zeit-Diagramm



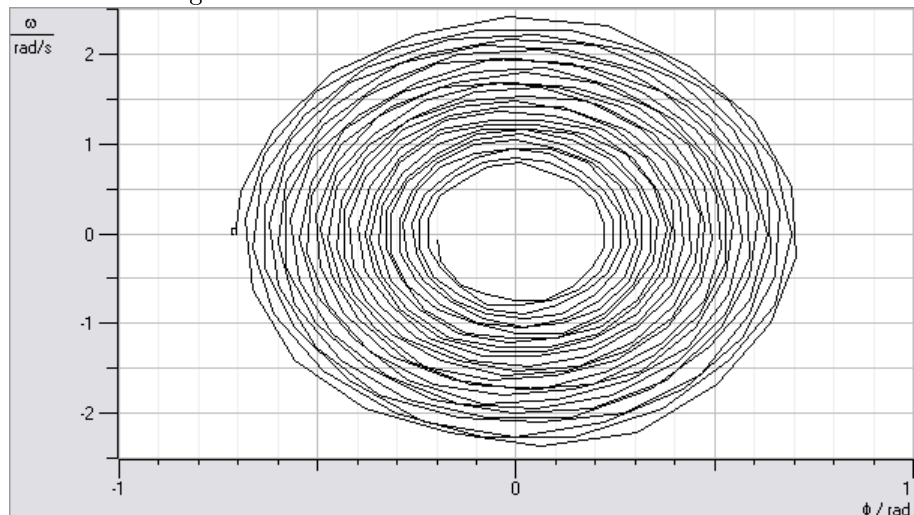
Winkelgeschwindigkeit-Zeit-Diagramm



Energie-Zeit-Diagramm



Phasenraumdiagramm



Da das System auch ohne Wirbelstrombremse nicht gänzlich ungedämpft ist (Reibung, etc.), sollte die Dämpfungskonstante β bestimmt werden. Wie in der Vorbereitung hergeleitet, fällt die Amplitude einer gedämpften Schwingung exponentiell ab. Die Dämpfungskonstante kann aus der Einhüllenden $\exp(-\beta t)$ bestimmt werden. Die Einhüllende ließen wir CASSY bestimmen und erhielten als Dämpfungskonstante:

$$\beta = 0,0216s^{-1}$$

2 Drehpendel, freie gedämpfte Schwingung

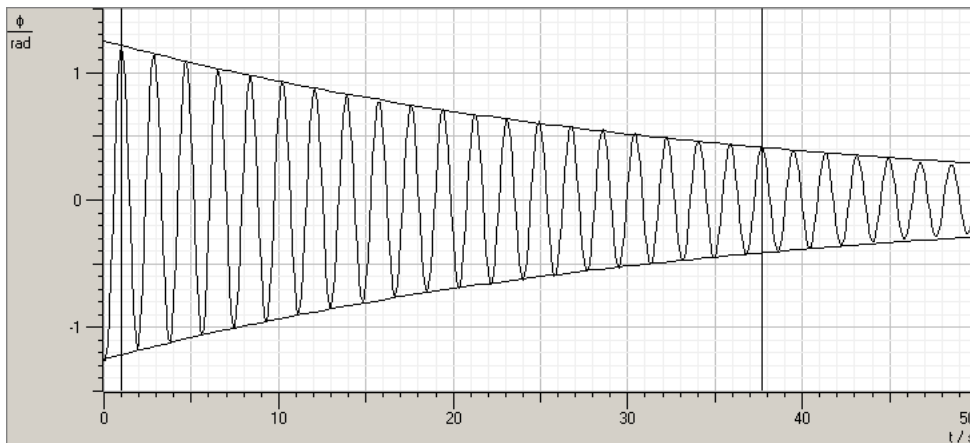
In diesem Versuchsteil wurde die Schwingung mit Dämpfung der Wirbelstrombremse (konkret $I_B = 100 / 200 / 400 / 700$ mA) gemessen und mit CASSY die Winkel-Zeit-Diagramme aufgenommen. Die Dämpfungskonstante β kann wieder über die Einhüllenden von CASSY bestimmt werden. Zum Vergleich wird die Formel $\beta = \frac{\ln(k)}{T}$ hergezogen. Dazu messen wir

über n Schwingungen und erhalten:

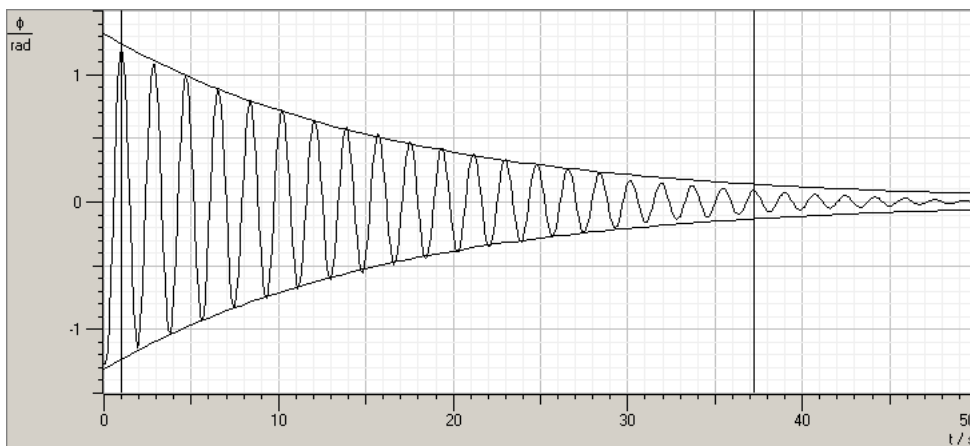
$$T = \frac{T_{ges}}{n} \quad k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_{i-1}}{\varphi_i}$$

Die Messung ergab folgende Schaubilder:

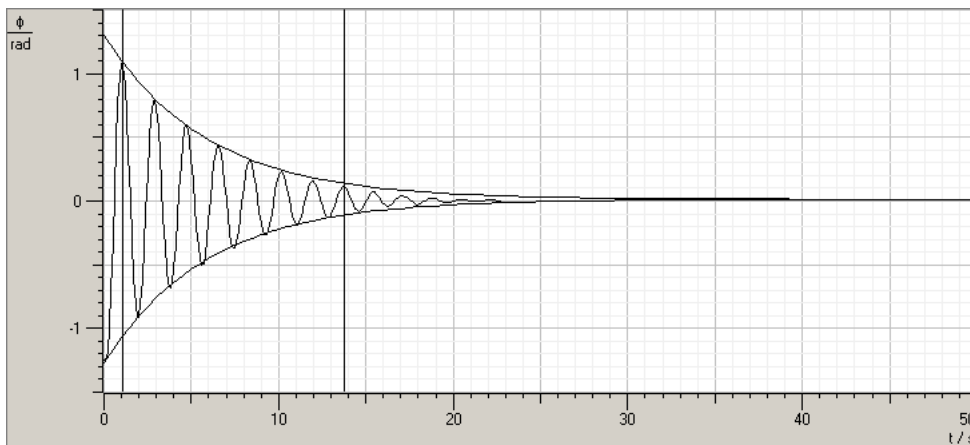
Auslenkung φ in Abhängigkeit der Zeit bei $I_B = 100 \text{ mA}$



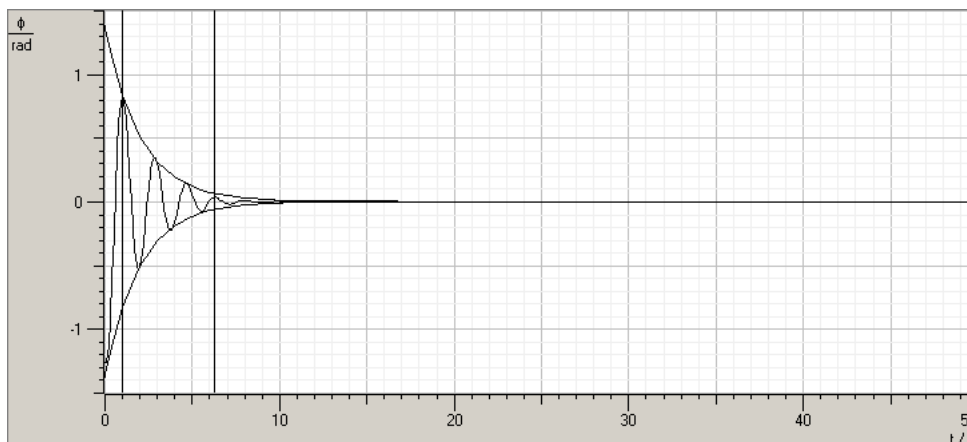
Auslenkung φ in Abhängigkeit der Zeit bei $I_B = 200 \text{ mA}$



Auslenkung φ in Abhängigkeit der Zeit bei $I_B = 400 \text{ mA}$



Auslenkung φ in Abhängigkeit der Zeit bei $I_B = 700 \text{ mA}$



Die Dämpfungskonstante k wurde mittels einer Tabellenkalkulation berechnet (s. Anhang). Die senkrechten Geraden in den Schaubilder bezeichnen die Stellen, an denen T_1 und T_2 abgelesen wurden. Die Gesamtdauer ergibt sich dann als $T_{\text{ges}} = T_2 - T_1$.

Die Güte lässt sich aus ω und β berechnen (s. Vorbereitung). Mit der Näherung, dass T von der Dämpfung nahezu unabhängig ist, ergibt sich:

$$Q = \frac{\omega}{2\beta} = \frac{\omega_0}{2\beta} \quad \text{für } \beta \cdot T_0 \ll 1 \text{ oder } \beta \ll T_0^{-1} = 0,55 \frac{1}{\text{s}}$$

In Aufgabe 1 erhielten wir für Periodendauer des ungedämpften Schwingfalls:

$$T_0 = 1,83 \text{ s} \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 3,43 \frac{1}{\text{s}}$$

Wir erhielten damit die folgenden Daten:

I_B [mA]	T_1 [s]	T_2 [s]	n	T [s]	k	$\beta = \frac{\ln(k)}{T}$ [$\frac{1}{\text{s}}$]	Q
100	1,0	37,7	20	1,835	1,052	0,0276	62,1
200	1,0	37,2	20	1,810	1,109	0,0571	30,0
400	1,0	13,7	7	1,814	1,387	0,180	9,5
700	1,0	6,3	3	1,767	2,568	0,534	3,2

Für $I_B = 700 \text{ mA}$ ist die oben verwendete Näherung nicht mehr gerechtfertigt. Genauer erhält man hier:

$$Q = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\beta T_0}} = 7,3$$

Die Einhüllende in den Schaubild wurde ebenfalls von CASSY erstellt und zwar als Fit in der Form $\pm A \cdot \exp(-\frac{t}{B}) + C$. Aus dem Wert für B lässt sich die Dämpfung über $\beta = B^{-1}$ berechnen. Die vollständigen Werte für A , B und C sind im handgeschriebenen Protokoll zu finden:

I_B [mA]	B [s]	$\beta = B^{-1}$ [$\frac{1}{\text{s}}$]	Q
100	34,1	0,0293	58,5
200	16,4	0,0610	28,1
400	5,9	0,169	10,1
700	2,1	0,476	3,6

Die Näherung für $I_B = 700 \text{ mA}$ ist wieder nicht gerechtfertigt. Man erhält genauer:

$$Q = 7,6$$

Generell sieht man, dass die berechneten Werte für β recht gut mit den grafisch ermittelten übereinstimmen. (Gleiches gilt für die daraus gewonnenen Gütewerte.) Die Güte der Schwinung nimmt bei steigendem Dämpfungsstrom immer mehr ab.

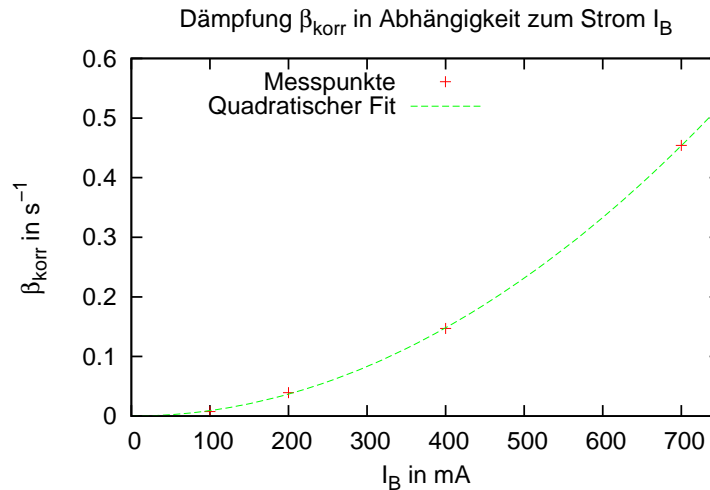
Im Folgenden wird nur noch mit den β -Werte gerechnet, die direkt von CASSY über die Einhüllende berechnet wurden.

Die korrigierte Dämpfungskonstante β_{korr} soll nur graphisch aufgetragen werden. β_{korr} wurde um den Dämpfungsterm der ungedämpften Schwingung korrigiert, sodass nur noch die zusätzliche Dämpfung durch die Wirbelstrombremse enthalten ist.

$$\beta_{\text{korr}} = \beta - \beta_0 \quad \text{Aus Aufgabe 1: } \beta_0 = 0,0216$$

Dies ergibt folgende Wertepaare, die mit gnuplot aufgetragen und ein quadratischer Fit der Form $\beta_{\text{korr}} = C \cdot I_B^2$ erstellt wurde:

$I_B \text{ [mA]}$	$\beta_{\text{korr}} \text{ [}\frac{1}{\text{s}}\text{]}$
100	0,0077
200	0,0394
400	0,147
700	0,454



Für die Konstante C liefert gnuplot:

$$C = (9,26 \pm 0,034) \cdot 10^{-7} \frac{1}{\text{mA}^2 \cdot \text{s}}$$

Da der statistische Fehler ziemlich klein ist, zeigt dies, dass unsere Messwerte gut auf einer Parabel liegen. Dies deckt sich mit der Theorie, die auch eine quadratische Abhängigkeit fordert (vgl. Vorbereitung).

Für die Grenzdämpfung ($\beta = \omega_0$) kann man den Dämpfungsstrom interpolieren. Es ergibt sich:

$$\omega_0 = C \cdot I_B^2 \quad I_B = \sqrt{\frac{\omega_0}{C}} = \sqrt{\frac{3,43 \frac{1}{\text{s}}}{9,26 \cdot 10^{-7} \frac{1}{\text{mA}^2 \cdot \text{s}}}} = 1920 \text{ mA}$$

Dies passt mit unseren Messungen überein. Wir konnten zwar nur bis 1,6 A messen, da die Wirbelstrombremse auch kurzzeitig nicht höher belastet werden darf, aber bei dieser Dämpfung war der Grenzfall noch nicht erreicht, sodass die Grenzstromstärke auf jeden Fall über 1,6 A liegen muss.

3 Drehpendel, Winkelrichtgröße D^*

Die Winkelrichtgröße D^* sollte bestimmt werden. Dafür hängten wir an den Außenrand des Drehpendels ein Gewicht, so dass am Drehpendel eine tangentielle Kraft angreift und

bestimmen die Auslenkung s . Die Gewichtskraft des Gewichts betr ug $F_G = 0,15N$, der Außenradius $r_a = 9,5cm$ und die Auslenkung $s = 0,074m$.

$$D^* = \frac{F \cdot r^2}{s} = 0,0183Nm$$

Aus der Winkelrichtgröße kann nun das Trägheitsmoment des Drehpendels berechnet werden. Die dazu benötigte Periodendauer $T(0)$ (Periodendauer ohne Dämpfung) wurde aus dem Winkel-Zeit-Diagramm zur Aufgabe 1 bestimmt $T(0) = 1,83s$.

$$\Theta = \frac{D^* \cdot T^2(0)}{4\pi^2} = 1,55 \cdot 10^{-3}kg \cdot m^2$$

Dieses Ergebnis stimmt ungefähr mit dem in Aufgabe 1 theoretisch berechneten Trägheitsmoment von $\Theta = 1,4 \cdot 10^{-3}kg \cdot m^2$ überein.

4 Drehpendel, erzwungene Schwingung

In dieser Aufgabe sollte die Resonanzkurve $\varphi(\omega)$ bei den D ampfungsstr omen $I_B = 200mA$ und $I_B = 400mA$ aufgenommen werden. Die Erregerfrequenz wurde von einem regelbaren Motor erzeugt. Um die Resonanzkurve zu bestimmen nahmen wir jeweils die Winkel-Zeit-Diagramme bei verschiedenen Motorfrequenzen auf. Aus diesen Diagrammen ließ sich die Erregerfrequenz ω und die Amplitude bestimmen, die sich nach einer kurzen Einschwingzeit einstellten. So ergaben sich folgende Wertetabellen:

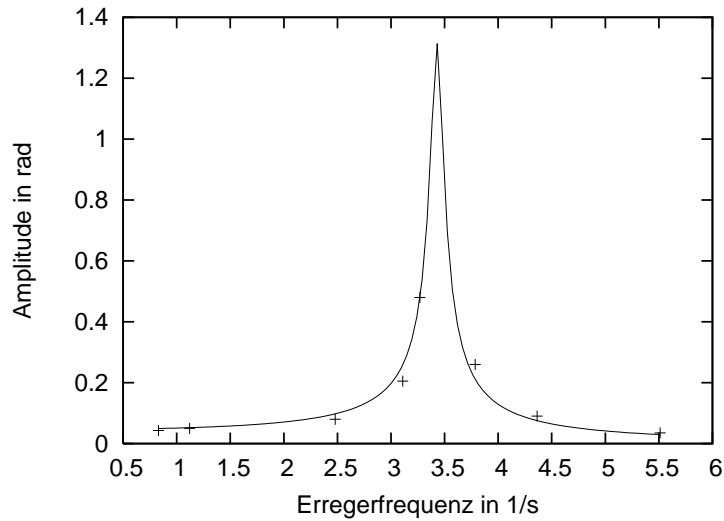
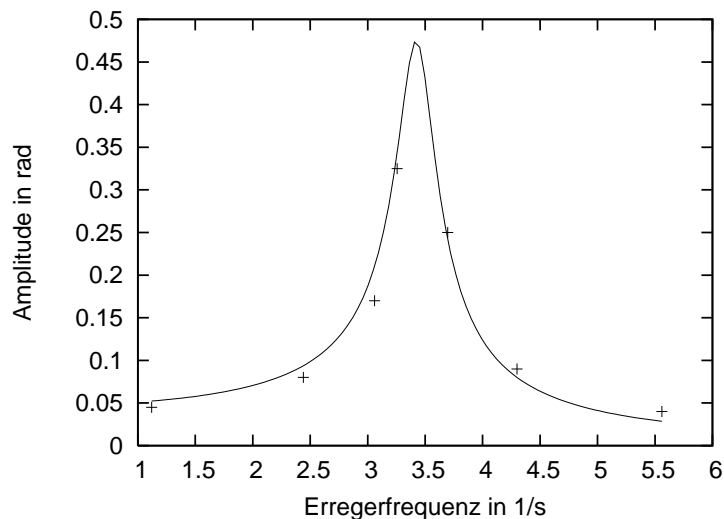
$$I_B = 200mA$$

Erregerfrequenz ω in 1/s	0,83	1,078	2,48	3,11	3,27	3,79	4,36	5,51
Amplitude in rad	0,043	0,05	0,08	0,205	0,48	0,26	0,09	0,035

$$I_B = 400mA$$

Erregerfrequenz ω in 1/s	1,12	2,44	3,06	3,26	3,70	4,30	5,56
Amplitude in rad	0,045	0,08	0,17	0,325	0,25	0,09	0,04

Vergleicht man diese Messwerte mit dem theoretisch erwarteten Verlauf der Resonanzkurve so wird deutlich, dass sie prinzipiell den theoretischen Verlauf bestätigen. In den folgenden Graphen wurden jeweils die theoretischen Resonanzkurven und unsere Messwerte eingetragen.

$I_B = 200\text{mA}$  $I_B = 400\text{mA}$ 

Durch den Vergleich mit den theoretischen Kurven wird jedoch auch klar, dass unsere Messwerte nicht dazu geeignet sind einen korrekten Kurververlauf zu bestimmen, da zu wenig Messwerte in der Nähe der Resonanzfrequenz vorliegen. Die tatsächliche maximal Höhe der Amplitude kann nur bestimmt werden, wenn man tatsächlich bei der Resonanzfrequenz einen Messwert nimmt. Rechts und Links von der Resonanzfrequenz fällt, bzw steigt die Kurve schnell an, so dass nicht auf die Höhe bei der Resonanzfrequenz geschlossen werden kann. Da diese Problematik bereits in der Versuchsbeschreibung erwähnt wurde, wollten wir entsprechend mehr Messwerte in der Nähe der Resonanzfrequenz nehmen. Bei genaueren Auswertung die Daten stellten wir fest, dass der Regler am Motor nicht linear ist. Wir hatten angenommen, dass beim Wechsel von Grobstellung 4 zu Grobstellung 6 derselbe Frequenzschritt passiert wie beim Wechsel von 6 nach 8. Tatsächlich war das erste ein Schritt von $0,243\text{ 1/s}$ und das zweite ein Schritt von $1,402\text{ 1/s}$.

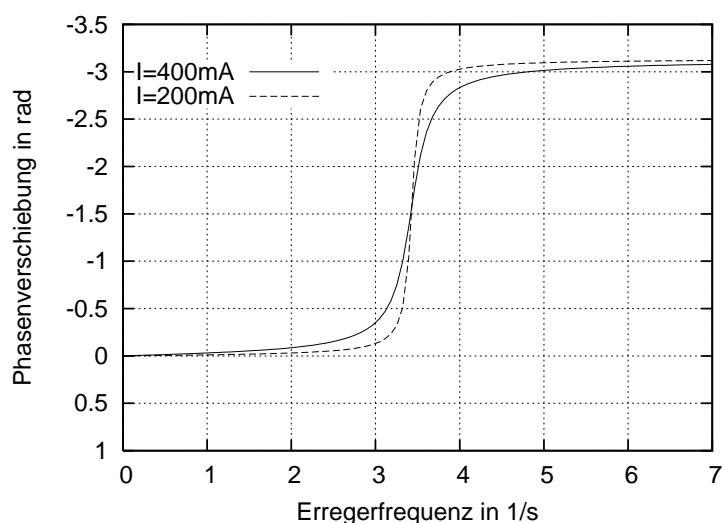
Es ist also klar, dass die Messung nicht dazu geeignet ist die Güte des Systems korrekt zu bestimmen. Die dennoch durchgeführte graphische Bestimmung aus den $1/\sqrt{2}$ -Punkten (Graphen siehe Anhang). Lieferte folgende Gütewerte (mit $\omega_0 = 3,431\text{ 1/s}$):

I_B in mA	$\Delta\omega$ in 1/s	Q
200	0,35	9,8
400	0,55	6,2

Die Phasenverschiebung für eine Erregerfrequenz sehr viel größer als/ sehr viel kleiner als die Eigenfrequenz und gleich der Eigenfrequenz des Drehpendels, wurde bereits in der Vorbereitung diskutiert. Für die Phasenverschiebung gilt:

$$\psi = \arctan\left(-\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right)$$

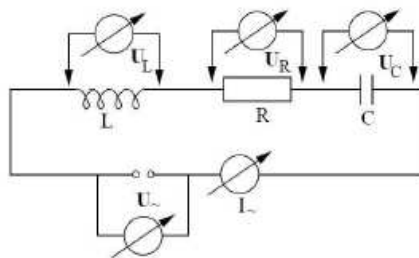
Da nun die Dämpfungskonstanten β für verschiedene Dämpfungen bekannt sind (aus Aufgabe 2) und ω_0 bekannt ist (aus Aufgabe 1), kann man die Phasenverschiebung darstellen:



Bei der Resonanzfrequenz ist die Phasenverschiebung $-\pi/2$ weit unter der Resonanzfrequenz ist sie 0 und weit darüber ist sie $-\pi$.

5 Schwingkreis, erzwungene Schwingung

In diesem Versuchsteil wurde ein elektrischer Schwingkreis nach nebenstehenden Schema aufgebaut und untersucht. U_L und U_C wurden von CASSY gemessen. Ebenso der Effektivwert der Stromstärke. Die Amplitude der Spannung wurde auf 3 V bei sinusförmiger Modulation eingestellt.



Daraus folgt für die anliegende Spannung U_{ges} :

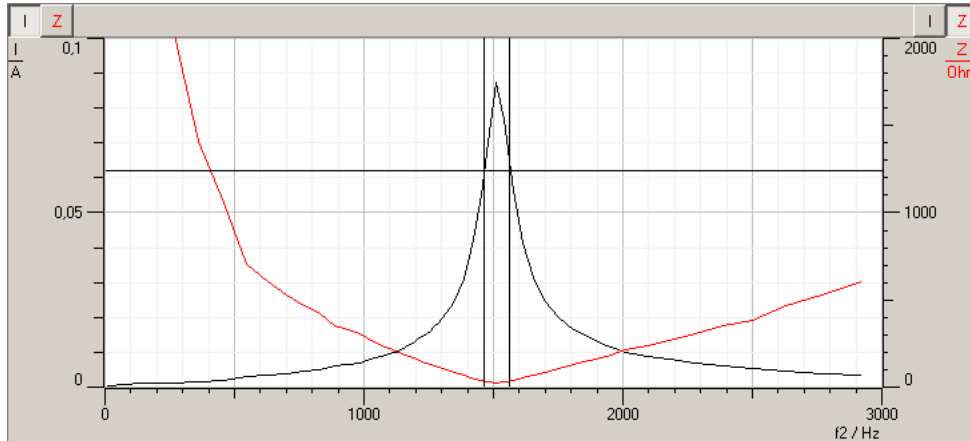
$$U_{\text{ges}} = U_{\text{effektiv}} = \frac{3 \text{ V}}{\sqrt{2}} = 2,12 \text{ V}$$

Es wird im Folgenden immer mit den Effektivwerte von Strom und Spannung gearbeitet.

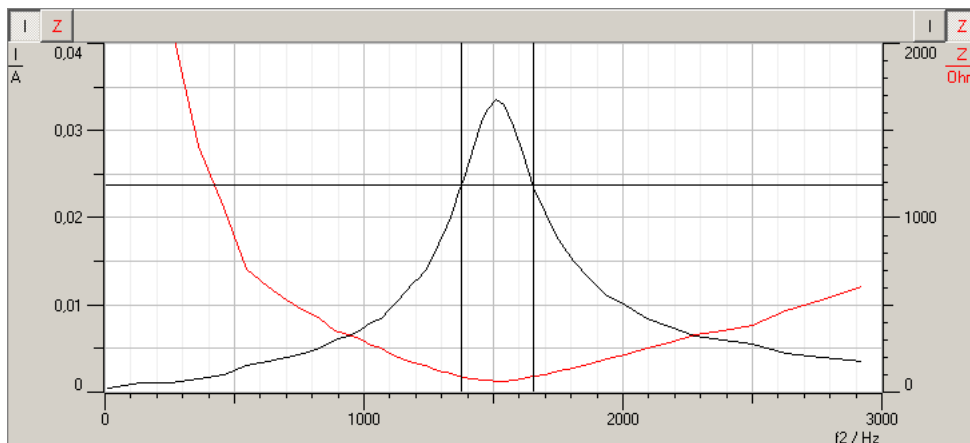
5.1 Stromstärke und Impedanz

Wir maßen mit CASSY die drei vorhanden Widerstände und erhielten folgenden Graphen:

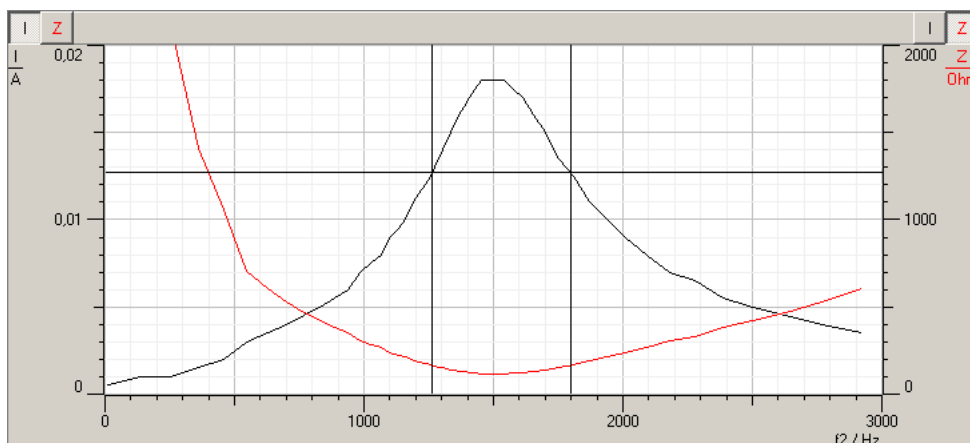
Amplitude und Impedanz in Abhängigkeit zur Spannungsfrequenz bei $R = 8,2\Omega$



Amplitude und Impedanz in Abhängigkeit zur Spannungsfrequenz bei $R = 47\Omega$



Amplitude und Impedanz in Abhängigkeit zur Spannungsfrequenz bei $R = 100\Omega$



Man erkennt sehr schön, dass die Impedanz (der Betrag des komplexen Widerstandes) im Schwingkreis wie ein Widerstand wirkt. Je kleiner die Impedanz, desto größer die Stromstärke und umgekehrt. Ebenso sieht man gut, dass bei der realle Widerstand zur Dämpfung beiträgt

($\beta = \frac{R}{2L}$), da bei höherem Widerstand der Strom viel flacher verläuft.

Die waagrechte Gerade in den Schaubildern liegt auf $\frac{1}{\sqrt{2}}$ des Gesamtmaximas. Die folgenden Werte wurde direkt in CASSY aus den Messdaten abgelesen. Dabei gezeichnet f_1 und f_2 die beiden Frequenzen, bei denen die Amplitude genau $\frac{1}{\sqrt{2}}$ des Gesamtmaximas ist.

R [Ω]	f_{res} [Hz]	I_{max} [mA]	$\frac{I_{\text{max}}}{\sqrt{2}}$ [mA]	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	Δf [Hz]	Q
8,2	1508	87,7	62,1	1465	1465	99	15,2
47	1507	33,6	23,8	1375	1655	280	5,38
100	1499	18,0	12,7	1262	1797	535	2,80

Die Güte berechnet sich, wie in der Vorbereitung gezeigt, durch

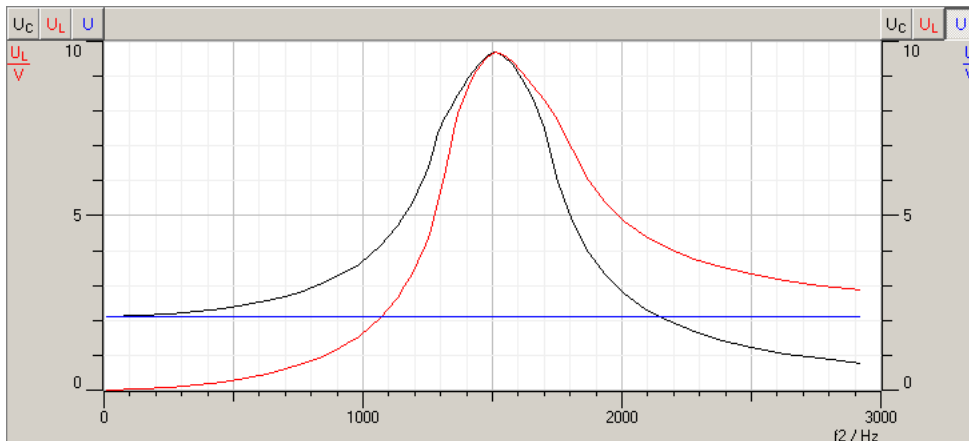
$$Q = \frac{\omega_{\text{res}}}{\Delta\omega} = \frac{2\pi \cdot f_{\text{res}}}{2\pi \cdot \Delta f} = \frac{f_{\text{res}}}{\Delta f}$$

Sie nimmt mit steigendem Widerstand, also mit steigender Dämpfung, ab.

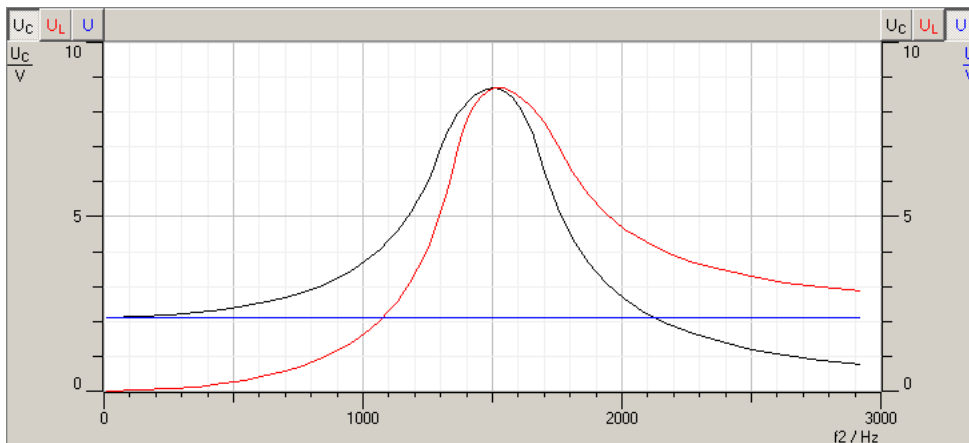
5.2 Resonanzüberhöhung

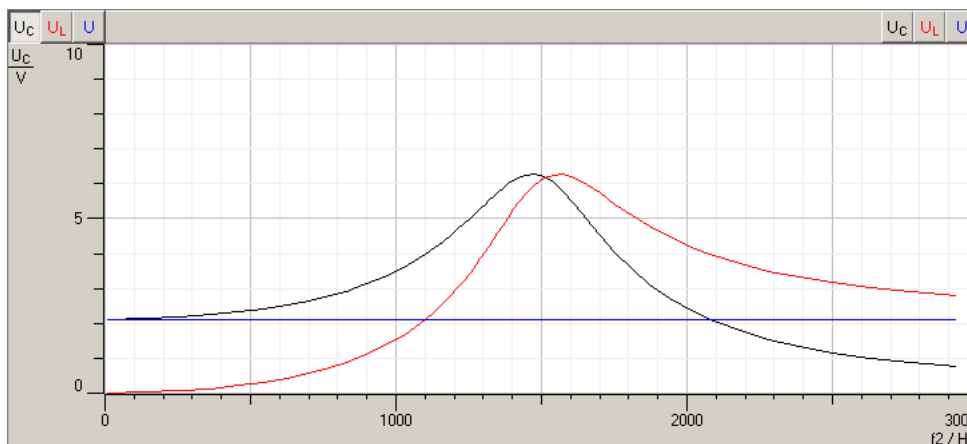
Im Resonanzfall tritt einen s.g. Spannungsüberhöhung auf. Dies bedeutet, dass die Effektivspannung an Spule und Kondensator deutlich höher ist, als die anliegende Effektivspannung.

Spannungsverläufe in Abhängigkeit zur Spannungsfrequenz bei $R = 8,2\Omega$



Spannungsverläufe in Abhängigkeit zur Spannungsfrequenz bei $R = 47\Omega$



Spannungsverläufe in Abhängigkeit zur Spannungsfrequenz bei $R = 100\Omega$ 

Man erkennt deutlich, dass mit steigendem Widerstand/Dämpfung die Spannungsspitzen immer kleiner werden. Die Spannungsverläufe lassen sich gut auseinanderhalten. Die konstante Spannung bei $U = 2,12\text{ V}$ ist die Spannung der Quelle. Bei 0 Hz (bei Gleichspannung) ist die Spannung am Kondensator gleich der Gesamtspannung, da hier die gesamte Spannung abfallen muss, da kein Gleichstrom durch die Kondensator fließen kann. An der Spule fällt daher keine Spannung ab. Im Resonanzfall steigen beide Spannungen stark an, um darüber ein umgekehrtes Verhalten zu zeigen. Deshalb bezeichnet man einen Kondensator auch als Hochpass und eine Spule als Tiefpass. Aus dem Maximalwert¹ der Spannungsverläufe, lässt sich die Güte berechnet:

$$Q = \frac{U_{L,\max}}{U_0} = \frac{U_{C,\max}}{U_0}$$

Mit den Werte, die bereits innerhalb CASSY abgelesen wurde ergibt sich:

$R [\Omega]$	U_{\max}	Güte Q
8,2	9,7	4,57
47	8,7	4,10
100	6,28	2,96

Diese Werte liegen deutlich neben den Werten, die unter 5.1 berechnet wurden. Da wir die Original-CASSY-Dateien zur Auswertung zur Verfügung hatten, konnten wir auch alle Einstellungen nochmals genau überprüfen. Wir konnten keinerlei Fehler der Messungen innerhalb der Einstellungen von CASSY finden. Die Kabel müssen vom Prinzip her richtig angeschlossen worden sein, da die Spannungsverläufe *qualitativ* den Erwartungen entspricht.

Auch eine Diskussion mit zwei Kommilitonen, die den Versuch (unabhängig von einander) schon durchgeführt hatten, ergab nur, dass dieser Problem genereller Natur zu sein scheint. Damals kamen ähnliche Werte heraus wie bei uns. Über die genauen Fehlerursachen kann man nur spekulieren: Rückkopplung über das Messsystem; Nicht-Beachten des Widerstandes der Spule; nicht geeignetes Messverfahren; ...

5.3 Phasenverschiebung

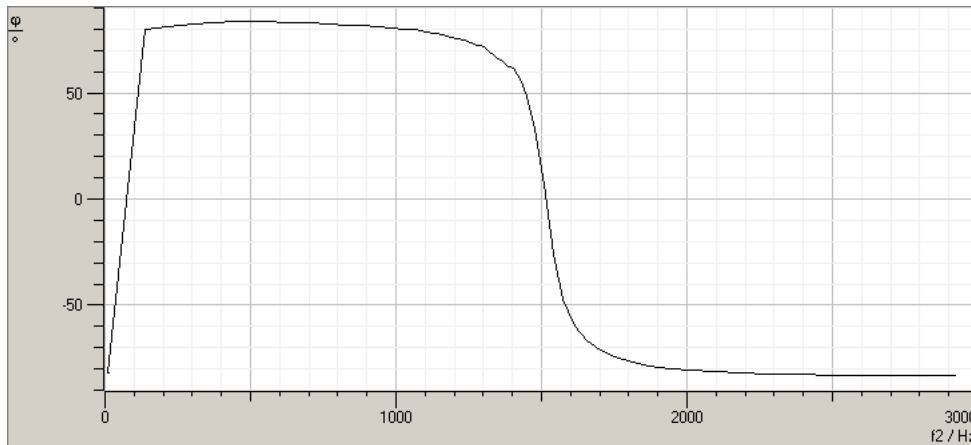
Beim elektrischen Schwingkreis kann man natürlich genauso wie beim mechanischen Schwingungssystem eine Phasenverschiebung feststellen. CASSY kann diese direkt messen und als Schaubild ausgeben. Gemessen wird die allerdings die Phasenverschiebung zwischen Strom

¹Dieser Maximalwert ist für Kondensator und Spule identisch

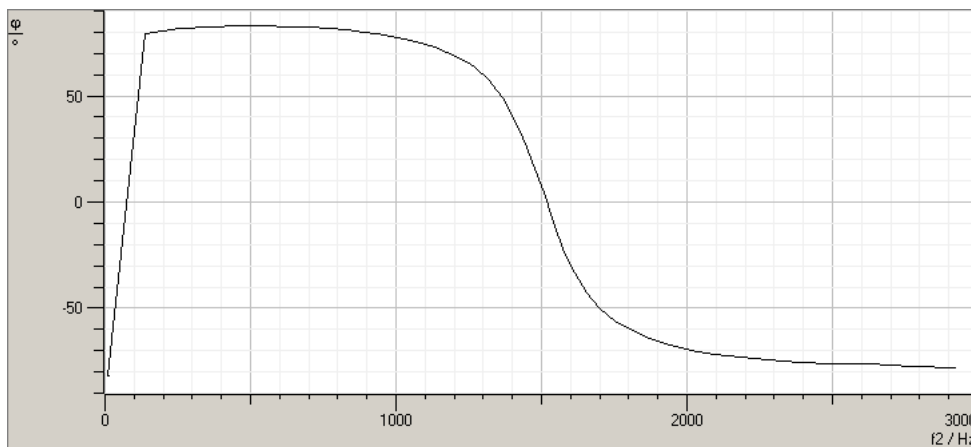
und Spannungsschwingung. Da aber die Erregerfunktion für die Schwingung von I die Ableitung der Spannung \dot{U} ist (vgl. Vorbereitung), verschiebt sich diese Phasenverschiebung etwas im Vergleich zur mechanischen Phasenverschiebung.

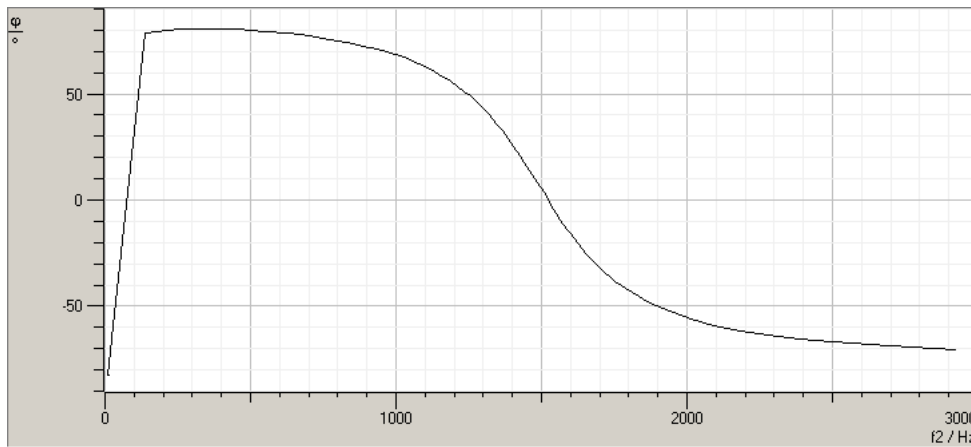
Die Spannungsquelle ist sinusförmig, die Ableitung davon also cosinusförmig; also um $\frac{\pi}{2}$ verschoben. Diesen Wert muss man immer von der Phasenverschiebung im Schwingkreis abziehen, um den Vergleich mit der Phasenverschiebung des mechanischen Schwingensystems vornehmen zu können.

Phasenverschiebung in Abhängigkeit zur Spannungsfrequenz bei $R = 8,2\Omega$



Phasenverschiebung in Abhängigkeit zur Spannungsfrequenz bei $R = 47\Omega$



Phasenverschiebung in Abhängigkeit zur Spannungsfrequenz bei $R = 100\Omega$ 

Der Sprung am linken Ende des Schaubilds muss ignoriert werden. Bei 0 Hz kann keine sinnvolle Aussage über eine dauerhafte Phasenverschiebung getroffen werden, da die Kondensator hier einmal aufgeladen wird und dann nichts mehr passiert.

Man erkennt, dass die Phasenverschiebung zuerst $\frac{\pi}{2}$ beträgt, bei der Resonanzfrequenz einen Sprung macht und dann bei $-\frac{\pi}{2}$ weiter verläuft. Ebenso sieht man, dass bei stärkerem Widerstand die Kurve flacher wird und damit der Bereich um $\varphi = 0$ größer wird. Da hier die Amplitude maximal wird, muss der Peak im Amplitudendiagramm bei größerem Widerstand breiter werden. Dies deckt sich mit den Schaubilder unter 5.1.