

Klausur zur Theoretischen Physik F SS 08

PROF. DR. P. WÖLFLE

09.07.08

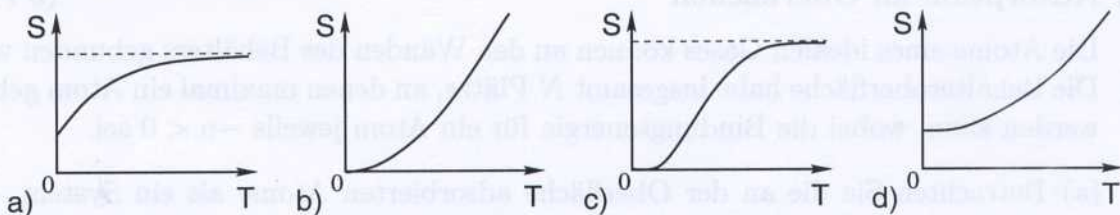
DR. M. GREITER

Arbeitszeit 120 min

1. Thermodynamik

(5 Punkte)

- (a) Ein quantenmechanisches System habe ein nach oben beschränktes Energiespektrum. Welche der gezeigten Kurven beschreibt die Temperaturabhängigkeit der Entropie $S(T)$ richtig?



- (b) Ein Teilchen kann zwei Zustände mit den Energiewerten $\varepsilon = 0$ bzw. $\varepsilon = \Delta > 0$ annehmen (Zweiniveausystem). Skizzieren Sie die spezifische Wärme $c(T)$ als Funktion der Temperatur.
- (c) Wie hängt die spezifische Wärme eines Elektronengases bei tiefen Temperaturen T von T ab?
- (d) Wie hängt die magnetische Suszeptibilität $\chi(T)$ eines einzelnen Spins (bei Magnetfeld $B \rightarrow 0$) von T ab? Skizzieren Sie $\chi(T)$.
- (e) Wie hängt die Spin-Suszeptibilität $\chi(T)$ eines Elektronengases (bei Magnetfeld $B \rightarrow 0$) bei tiefen Temperaturen T von T ab? Skizzieren Sie $\chi(T)$.

(je 1 Punkt)

2. Zwei Teilchen im Potentialtopf

(5 Punkte)

Wir betrachten einen eindimensionalen, harmonischen Potentialtopf, in dem zwei spinlose, untereinander nicht wechselwirkende Teilchen gebunden sind. Ein einzelnes Teilchen habe also die Energieeigenwerte $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$. $n = 0, 1, \dots$

- (a) Die Teilchen seien unterscheidbar. Zeigen Sie, daß die kanonische Zustandssumme Z_K faktorisiert und berechnen Sie Z_K . (2 Punkte)
- (b) Die beiden Teilchen seien nun ununterscheidbare Fermionen. Berechnen Sie direkt (ohne chemisches Potential!) die kanonische Zustandssumme Z_K für diesen Fall. (3 Punkte)

3. Ising-Modell für 2 Gitterplätze

(5 Punkte)

Gegeben ist der Hamilton-Operator des Ising-Modells für 2 Spins σ_1, σ_2 :

$$\hat{H} = -J\sigma_1\sigma_2 - \mu B(\sigma_1 + \sigma_2), \quad J > 0, \quad \sigma_{1,2} = \pm 1/2$$

- (a) Zunächst sei das äußere Magnetfeld $B = 0$. Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme Z_K und daraus die spezifische Wärme C_V als Funktion der Temperatur T . (2 Punkte)
- (b) Nun sei $B \neq 0$. Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme Z_K , die freie Energie F und daraus die Magnetisierung M . Berechnen Sie dann die Suszeptibilität $\chi(T) = \left. \frac{\partial M}{\partial B} \right|_{B=0}$ bei $B = 0$. (2 Punkte)
- (c) Skizzieren Sie $\chi(T)$ als Funktion der Temperatur. (1 Punkt)

4. Adsorption an Oberflächen

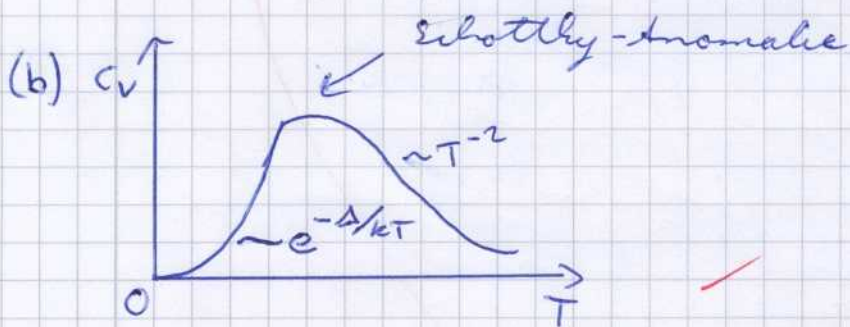
(5 Punkte)

Die Atome eines idealen Gases können an den Wänden des Behälters gebunden werden. Die Behälteroberfläche habe insgesamt N Plätze, an denen maximal ein Atom gebunden werden kann, wobei die Bindungsenergie für ein Atom jeweils $-u < 0$ sei.

- (a) Betrachten Sie die an der Oberfläche adsorbierten Atome als ein System, das an ein Reservoir (das System der Gasatome) mit Teilchenaustausch gekoppelt ist. Berechnen Sie die großkanonische Zustandssumme Z_G für das System der adsorbierten Atome und daraus die mittlere Zahl $\langle n \rangle$ der adsorbierten Atome in Abhängigkeit von der Bindungsenergie $-u$ und des chemischen Potentials μ_{ad} der adsorbierten Atome. (4 Punkte)
- (b) Das System der adsorbierten Atome und das der Gasatome sollen im thermodynamischen Gleichgewicht miteinander sein. Welche Beziehung zwischen dem chemischen Potential μ der adsorbierten Atome und dem chemischen Potential μ_{gas} der Gasatome ergibt sich hieraus? (1 Punkt)

①

- (a) c) ist richtig, da $S(0) = 0$ sein muss und die Entropie gegen ein Maximalwert läuft, da für $T \rightarrow \infty$ alle Zustände gleichwahrscheinlich werden. (S ist dann $S = k \ln R$)

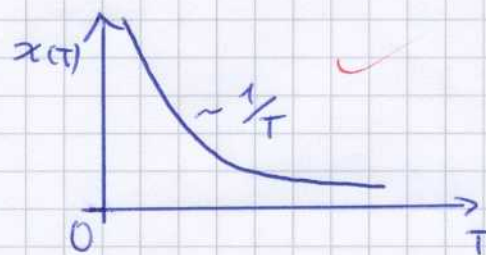


- (c) Elektronen sind Fermionen

$\Rightarrow c_v$ hängt linear von T für $T \rightarrow 0$ ab!

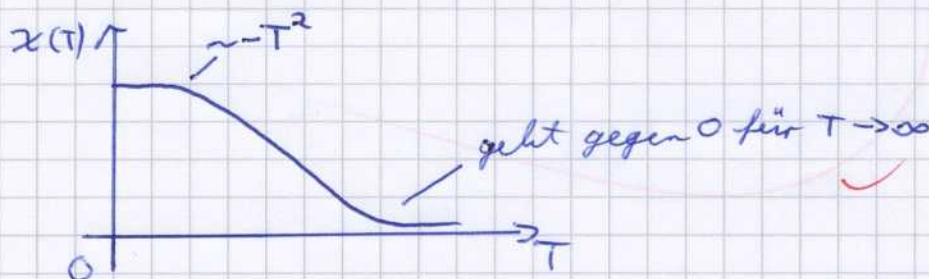
- (d) ~~Sei~~ Es gilt das Curie-Gesetz, da es sich um einen freien Spin handelt (er kann nicht wechselwirken da er alleine ist)

$$\Rightarrow \chi(T) \sim \frac{1}{T}$$



- (e) ^{Beim} ~~Bei~~ Elektronengas gilt die Pauli-Exklusionstheorie.

Das heißt für $T \rightarrow 0$ ist χ konstant, aber ungleich null!



⑤

②

a) Es gilt $z_k = \sum \exp(-\epsilon_k \beta)$ $\beta = kT$

$$z_k = \sum_{\alpha} e^{-E_{\alpha} \beta}$$

Mikrozustände $\alpha = \{n_1, n_2\}$ mit $n_i = 0, 1, 2, \dots$

$$E_{\alpha} = E_{n_1} + E_{n_2}$$

$$\Rightarrow z_k = \sum_{n_1, n_2} e^{-(E_{n_1} + E_{n_2}) \beta} = \sum_{n_1, n_2} e^{-\hbar \omega (\frac{1}{2} + n_1) \beta} \cdot e^{-\hbar \omega (\frac{1}{2} + n_2) \beta}$$

$$= \sum_{n_1=0}^{\infty} e^{-\hbar \omega (\frac{1}{2} + n_1) \beta} \cdot \sum_{n_2=0}^{\infty} e^{-\hbar \omega (\frac{1}{2} + n_2) \beta}$$

$$= z_0^2 \quad \text{mit}$$

$$z_0 = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\hbar \omega (\frac{1}{2} + n) \beta} = e^{-\hbar \omega \frac{1}{2} \beta} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (e^{-\hbar \omega \beta})^n}_{\text{geom. Reihe}} = \frac{1}{1 - e^{-\hbar \omega \beta}}$$

$$= \frac{e^{-\hbar \omega \frac{1}{2} \beta}}{1 - e^{-\hbar \omega \beta}} = \frac{1}{2 \sinh(\frac{1}{2} \hbar \omega \beta)}$$

$$z_k = \frac{1}{4 \sinh^2(\frac{1}{2} \hbar \omega \beta)}$$

2

②

- b) Das System sei ~~ist~~ vollständig beschrieben, durch die Angabe von n_1 und n_2 , die angeben, in welchem Zustand sich das Energierichere (-ärmere) Teilchen befindet.

$$\Rightarrow n_1 > n_2 \quad n_{1,2} \in \mathbb{N}_0 \quad \left(\begin{array}{l} \neq, \text{ da Fermionen} \\ >, \text{ damit die Beschreibung} \\ \text{eindeutig ist} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow E = \hbar \omega (n_1 + n_2 + 1)$$

$$Z_k = \sum_{\substack{n_1, n_2 \\ n_1 > n_2}} e^{-\hbar \omega (n_1 + n_2 + 1) / \beta} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{n_1, n_2 \\ n_1 \neq n_2}} e^{-\hbar \omega (n_1 + n_2 + 1) / \beta}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\substack{n_1, n_2 \\ \text{frei}}} e^{-\hbar \omega (n_1 + n_2 + 1) / \beta} - \frac{1}{2} \sum_n e^{-\hbar \omega (2n + 1) / \beta}$$

$$= \frac{1}{2} Z_0(\hbar \omega)^2 - \frac{1}{2} Z_0(2\hbar \omega)$$

$$\text{mit } Z_0(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\varepsilon(n+1/2)/\beta} = e^{-\varepsilon/2\beta} \cdot \underbrace{\frac{1}{1-e^{-\varepsilon\beta}}}_{\text{geom. Reihe}} = \frac{1}{2 \sinh(\frac{1}{2}\varepsilon\beta)}$$

$$\Rightarrow Z_k = \frac{1}{8} \frac{1}{\sinh^2\left(\frac{\hbar \omega}{2kT}\right)} - \frac{1}{4} \frac{1}{\sinh\left(\frac{\hbar \omega}{kT}\right)}$$

Im Vergleich zu a)
ergibt sich also ein
Faktor $\frac{1}{2!}$ wegen der
Unterscheidbarkeit

und

ein negativer Term,
der wegen den
verbotenen doppelt
besetzten Zuständen
resultiert!

3+2=5

③

a) $B=0$

$$\beta = \frac{1}{kT}$$

$$\Rightarrow \hat{H} = -J G_1 G_2 \quad G_{1,2} = \pm \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \text{Eigenwerte von } \hat{H}: -\frac{J}{4}, +\frac{J}{4} \quad (\text{je 2-fach entartet})$$

$$\Rightarrow Z_k = \sum_{\text{Zustände}} e^{-\hat{H}\beta} = 2e^{\frac{J}{4}\beta} + 2e^{-\frac{J}{4}\beta}$$

$$Z_k = 4 \cosh\left(\frac{J}{4}\beta\right) \quad \checkmark$$

$$U = \langle \hat{H} \rangle = \partial_{(-\beta)} \ln Z_k = -\tanh\left(\frac{J}{4}\beta\right) \cdot \frac{J}{4}$$

$$C_V = \frac{\partial U}{\partial T} = \partial_T \left(-\tanh\left(\frac{J}{4}\beta\right) \cdot \frac{J}{4} \right) = \frac{-1 \left(\frac{J}{4}\right)^2}{\cosh^2\left(\frac{J}{4}\beta\right)} \cdot \partial_T \beta$$

$$C_V = k \left(\frac{J}{4kT} \right)^2 \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{J}{4kT}\right)} \quad \checkmark$$

b) Eigenwerte zu $\hat{H}$: $\frac{J}{4}$ (2fach)

$$-\frac{J}{4} + \mu B \quad (1 \text{ fach})$$

$$-\frac{J}{4} - \mu B \quad (1 \text{ fach})$$

$$\Rightarrow Z_k = \sum e^{-\hat{H}\beta} = 2e^{-\frac{J}{4}\beta} + e^{\frac{J}{4}\beta} (e^{-\mu B\beta} + e^{+\mu B\beta})$$

$$= 2e^{-\frac{J}{4}\beta} + 2e^{\frac{J}{4}\beta} \cosh(\mu B\beta)$$

$$= 2e^{-\frac{J}{4}\beta} (1 + e^{\frac{J}{2}\beta} \cosh(\mu B\beta)) \quad \checkmark$$

$$F = -kT \ln Z_k = -kT \left(\ln 2 + \frac{J}{4}\beta + \ln(1 + e^{\frac{J}{2}\beta} \cosh(\mu B\beta)) \right)$$

$$= \frac{J}{4} - kT \ln 2 - kT \ln(1 + e^{\frac{J}{2}\beta} \cosh(\mu B\beta)) \quad \checkmark$$

$$dF = -SdT - MdB \quad \checkmark$$

$$\rightarrow \cancel{F} \cdot M = - \left(\frac{\partial F}{\partial B} \right)_T$$

$$M = \frac{\partial}{\partial B} \left(kT \ln(1 + e^{+\frac{1}{2}\beta} \cosh(\mu B \beta)) \right)$$

$$M = kT \frac{e^{+\frac{1}{2}\beta} \cdot \sinh(\mu B \beta) \cdot \mu \beta}{1 + e^{+\frac{1}{2}\beta} \cosh(\mu B \beta)} \quad \checkmark$$

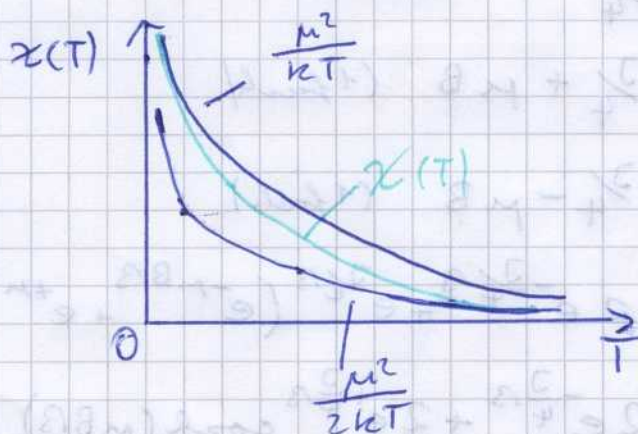
$$\chi(T) = \left. \frac{\partial M}{\partial B} \right|_{B=0} = \frac{\mu^2 \beta e^{+\frac{1}{2}\beta} \cosh(\mu B \beta) \Big|_{B=0}}{1 + e^{+\frac{1}{2}\beta} \cosh(\mu B \beta) \Big|_{B=0}}$$

↑
zähler muss
abgeleitet werden, da
sonst $\sinh(\dots B) = 0$ ist
bei $B \rightarrow 0$

$$\chi(T) = \mu^2 \frac{1}{kT} \frac{1}{e^{-\frac{1}{2}\beta} + 1} \quad \checkmark$$

o) Grenzwerte: $T \rightarrow \infty (\beta \rightarrow 0) \Rightarrow \chi(T) \rightarrow \mu^2 \frac{1}{2kT} \quad \checkmark$

$T \rightarrow 0 (\beta \rightarrow \infty) \Rightarrow \chi(T) \rightarrow \mu^2 \frac{1}{kT} \quad \checkmark$



(4)

a) Def.: $\mu = \mu_{\text{ad}}$

↙ (Anzahl der Zustände vollständig besetzt)
Besetzungszahl n_λ des λ . Platz an der Wand $n_\lambda \in \{0, 1\}$

⇒ Gesamtenergie $E = \sum_\lambda -u n_\lambda$ $u > 0$

$$Z_G = \sum_{\{n_\lambda\}} e^{-\beta(E - \mu N_T)}$$

$$N_T = \sum_\lambda n_\lambda$$

↑
Teilchenzahl
an der Wand

$$= \sum_{\{n_\lambda\}} e^{-\beta \sum_\lambda n_\lambda (u + \mu)} = \left(\sum_{n=0}^1 e^{-\beta n (u + \mu)} \right)^N$$

$$Z_G = \left(1 + e^{-\beta(u + \mu)} \right)^N =: Z_0^N$$

$$\langle n \rangle = \frac{1}{N} \left\langle \sum_\lambda n_\lambda \right\rangle = \frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial (u + \mu)} \ln Z_G = \frac{\partial}{\partial (u + \mu)} \ln Z_0$$

$$\langle n \rangle = N \cdot \frac{e^{-\beta(u + \mu)}}{1 + e^{-\beta(u + \mu)}} = \frac{N}{e^{\beta(u + \mu)} + 1} = N \cdot f(-u - \mu)$$

↑
Fermifunktion

b) Im thermodyn. Gleichgewicht ist $\mu_{\text{ad}} = \mu_{\text{gas}}$ trivialerweise, da bei einem Unterschied, ein einseitiger Teilchenaustausch energetisch begünstigt wäre!