

Versuchsauswertung P2-72: Gamma-Spektroskopie und Statistik

Kathrin Ender, Michael Walz
Gruppe 10

6. Juni 2008

Inhaltsverzeichnis

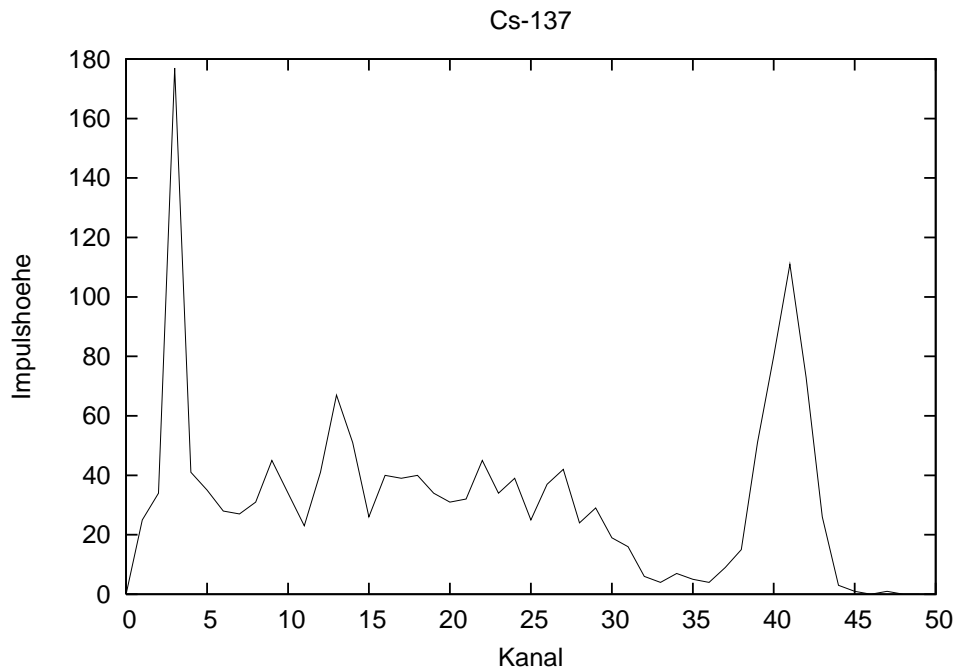
1	Impulshöhenspektren	2
1.1	Einkanalmessung des Spektrums von Cs-137	2
1.2	Messung im Mehrkanalbetrieb	2
1.3	Interpretation der Spektren	3
1.3.1	Cs-137	4
1.3.2	Co-60	5
1.3.3	Na-22	5
1.3.4	Fazit zur Interpretation	6
2	Aktivität des Cs-137-Präparats	6
3	Statistik	7
3.1	Gesamtzählrate	7
3.2	Stichprobe über Kanal 1-16	8
3.2.1	χ^2 -Tests	9

1 Impulshöhenspektren

In diesem Versuch wurden mit Hilfe von Cassy Impulshöhenspektren der γ -Strahlung verschiedener radioaktiver Strahler aufgenommen. Aus den Impulshöhenspektren kann die Energie der emittierten γ -Quanten bestimmt werden.

1.1 Einkanalmessung des Spektrums von Cs-137

Zunächst maßen wir das Spektrum von Cs-137 im Einkanalbetrieb aus. Einkanalbetrieb bedeutet, dass man nacheinander die verschiedenen Spannungsintervalle betrachtet und „zählt“ wie viel Gammaquanten pro Zeit registriert werden. Wir wählten eine Messzeit von 10s pro Kanal und eine Unterteilung in 50 Kanäle. Der Abstand Probe-Detektor wurde dabei so eingestellt, dass die Gesamtzählrate im Mehrkanalmodus über 1000/s betrug. Wir erhielten folgendes Spektrum:

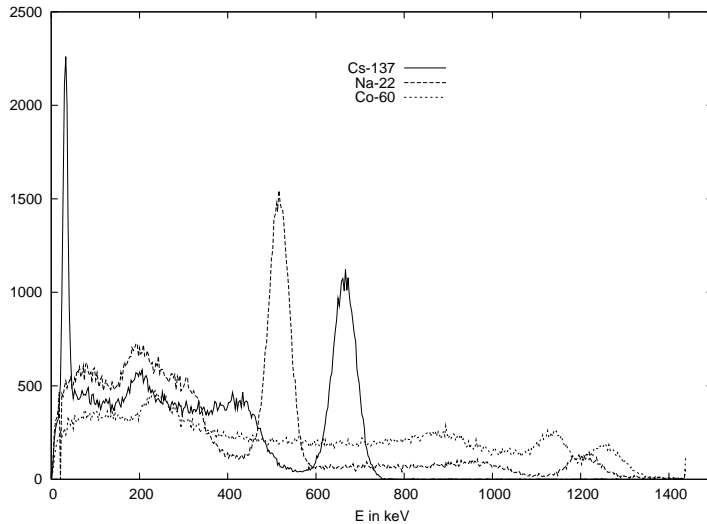


Der qualitativ erwartete Verlauf ist eindeutig zu erkennen. Wie in der Vorbereitung bereits erläutert erhält man im Cs-137 Spektrum zunächst die Röntgenlinie (etwa bei Kanal 3). Der Rückstreupeak (bei Kanal 13), die Comptonkante (bei Kanal 30-32) und der Photopeak (bei Kanal 41) sind ebenfalls deutlich erkennbar. Um auch eine quantitative Auswertung des Spektrums vornehmen zu können bei der man den einzelnen Kanälen auch eine Energie zuordnen kann, so dass man die gemessenen mit den theoretischen Energien vergleichen kann, empfiehlt es sich ein Spektrum mit mehr Messwerten aufzunehmen.

1.2 Messung im Mehrkanalbetrieb

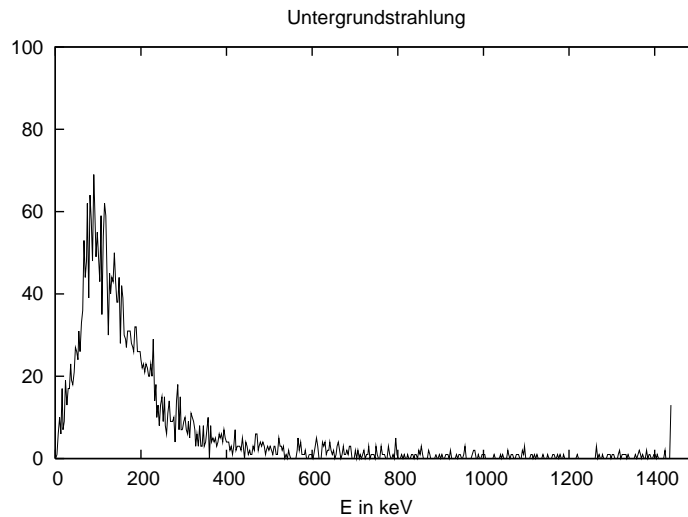
Im Mehrkanalbetrieb werden alle Kanäle gleichzeitig ausgemessen. Wir verwendeten den 512 Kanalbetrieb und eine Messzeit von 100s. Der Abstand zwischen Strahler und Detektor wurde wieder so gewählt, dass die Gesamtzählrate zwischen 1000/s und 1500/s lag. Es sollten die Spektren von Cs-137, Na-22 und Co-60 aufgenommen werden. Da Cobalt das „breiteste“ Spektrum hat, stellten wir alles so ein, dass dieses Spektrum gut sichtbar war. Dann nahmen wir die anderen beiden Spektren sowie das Untergrundspektrum auf. Das Untergrundspek-

trum benötigt man um die aufgenommenen Spektren zu korrigieren. Eine genauere statistische Betrachtung des Untergrundspektrums folgt in Aufgabenteil 3. Wir erhielten folgende Spektren:



Im Bild wurde die x-Achse bereits in Energie skaliert. Näheres zur Skalierung und zu den einzelnen Spektren wird in Interpretation der Spektren erläutert.

Das nebenstehende Untergrundspektrum wurde bereits subtrahiert.



1.3 Interpretation der Spektren

Um den Kanälen die entsprechenden Energien zuzuordnen zu können, bzw um die x-Achse in Energieeinheiten skalieren zu können, muss mindestens eine Energie, bei der ein charakteristischer Peak auftritt, als bekannt vorausgesetzt werden.

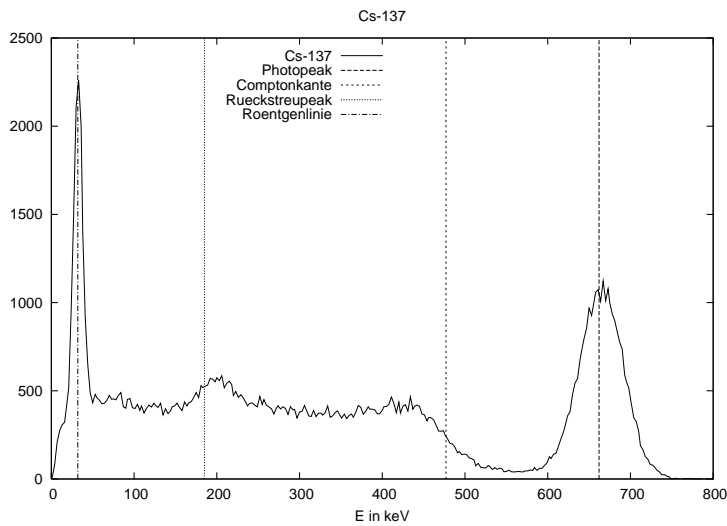
Laut Aufgabenstellung soll der Photopeak im Cs-137 Spektrum, der bei 662keV liegt verwendet werden. Unser Betreuer schlug vor, man könne auch zwei bekannte Punkte wählen und die Skalierung so genauer machen, da der Kanal Null nicht unbedingt der Energie Null entsprechen muss. Daher verwendeten wir zusätzlich die Röntgenlinie im Cs-137 Spektrum bei 32keV. Die so erhaltene Skalierung erscheint als vernünftig, da die paar Kanäle die nun einer negativen Energie zugeordnet wurden, alle eine Zählrate von 0 aufwiesen.

Diese Skalierung übertrugen wir auf alle Spektren, so dass wir die in der Vorbereitung berechneten Energien, bei denen theoretisch Charakteristika im Spektrum auftreten müssten, mit den tatsächlich erhaltenen Spektren vergleichen können. Aus den Spektren ergeben sich folgende Energien. $E_{\gamma 1/2}$ ist die erste/zweite Energie, die die abgestrahlten Gammaquanten haben. Falls es keine zweite Gammaquantenenergie gibt wie bei Cs, so ist dies mit einem

Strich markiert. Ist ein * eingetragen, so bedeutet das, dass kein passender Peak gefunden wurde. E_C ist die Energie die Comptonkante und E_R ist die Energie des Rückstreupeaks. E_R kann aus $E_\gamma - E_C$ berechnet werden.

Strahler	Cs-137	theo	Co-60	theo	Na-22	theo
E_{γ_1}	662keV	662keV	1130keV	1178keV	515keV	511keV
E_{γ_2}	-	-	1250keV	1333keV	1210keV	1275keV
E_{C_1}	470keV	477keV	940keV	968keV	345keV	340keV
E_{C_2}	-	-	*	1118keV	1040keV	1062keV
E_{R_1}	200keV	185keV	245keV	210keV	195keV	171keV
E_{R_2}	-	-	245keV	215keV	195keV	213keV

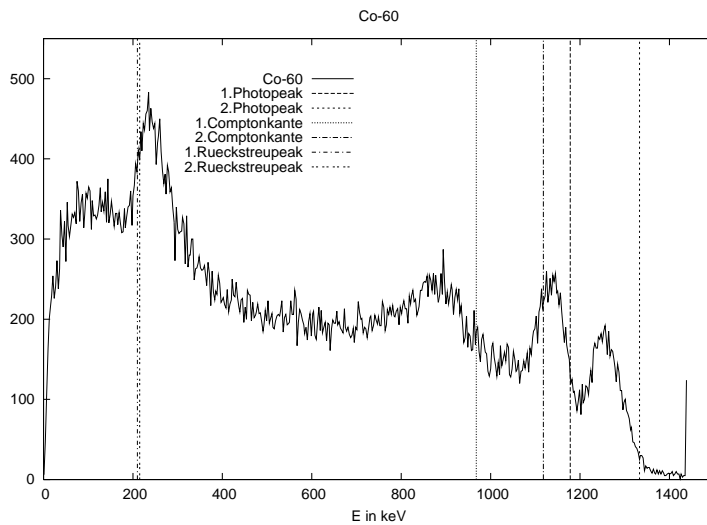
1.3.1 Cs-137



Zunächst eine Erklärung zur Entstehung der Röntgenlinie im Cs-137 Spektrum, die wir zur Energieskalierung verwendet haben. Beim Zurückfallen des angeregten Kerns in seinen Grundzustand kann die Anregungsenergie auf ein kernnahes Hüllenelektron übertragen werden. Dieses sogenannte Konversionselektron hat dann genug Energie um die Bindungsenergie zu überwinden. Das entstehenden Loch in der Elektronenhülle wird durch Elektronen die von „außen“ nachrücken aufgefüllt. Diese Elektronen fallen also in einen energetisch niedrigeren Zustand und emittieren dabei Gammaquanten, deren Energie 32keV entspricht.

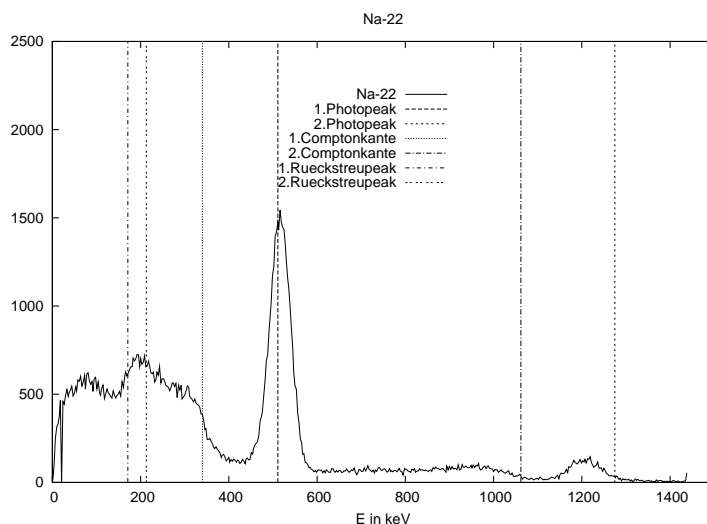
Die Comptonkante und der Rückstreupeak liegen nicht ganz bei den erwarteten Energien (eingezeichnete Linien). Es handelt sich um Abweichungen von 1,5% und 8%. Wobei zu beachten ist, dass die genaue Lage der Comptonkante gar nicht zu bestimmen ist, da der Abfall langsam abläuft und nicht so sprunghaft wie in der Theorie.

1.3.2 Co-60



Beim Spektrum von Co-60 ist sofort zu erkennen, dass es sich um eine Überlagerung der Spektren für zwei Gammaquantenenergien handelt. Die Energien, bei denen die beiden Photopeaks auftreten, scheinen zunächst deutlich von den erwarteten abzuweichen. Es handelt sich allerdings auch „nur“ um 4% und 6% Abweichung vom theoretischen Wert. Die beiden Rückstreupeaks fallen so nah zusammen, dass die im Spektrum vermutlich nicht zu unterscheiden sind. Tatsächlich lässt sich nur ein Peak in dem erwarteten Energiebereich erkennen. Die Energie bei welcher der Rückstreupeak auftritt zeigt eine Abweichung von 14%-16% von den erwarteten Rückstreuenergien. Die bestimmte Energie der ersten Comptonkante weicht nur 2,8% von der theoretischen ab. Die zweite Comptonkante ist jedoch nicht zu erkennen. Sie wird vermutlich durch den ersten Photopeak überlagert.

1.3.3 Na-22



Das Gammaspektrum von Natrium-22 besteht aus der Überlagerung der Spektren für zwei Quantenenergien. Der erste Photopeak, der nicht mal 1% von der erwarteten Energie abweicht ist dabei viel ausgeprägter als der zweite. Die beiden Rückstreupeaks überlagern sich zu einem. Die Comptonkanten sind gut zu erkennen und liegen bei den erwarteten Energien

mit Abweichungen von 14% und 8%.

1.3.4 Fazit zur Interpretation

Die ausgemessenen Spektren lassen die in der Vorbereitung erklärten Charakteristika wie Photopeak, Rückstreupeaks und Comptonkante gut erkennen. Die Abweichungen der Energien, bei denen die Charakteristika auftraten, waren im Rahmen unserer Messgenauigkeit in Ordnung. Es darf jedoch nicht vergessen werden, dass zwei Energien als bekannt vorausgesetzt wurden um eine Energieskalierung vor zu nehmen. Liegen bei diesen Peaks also Fehler vor, so wurden sie auf alle Auswertungen übertragen. Außerdem könnte es sein, dass die Ergebnisse leicht verschiedenen gewesen wären, wenn wir zum Beispiel die beiden Photopeaks von Co-60 zu Skalierung verwendet hätten.

2 Aktivität des Cs-137-Präparats

In diesem Versuchsteil soll die Aktivität des Cs-137-Präparats gemessen werden. Die gemessene Zählrate muss noch durch einen Absorptionsfaktor korrigiert werden¹. Wir maßen jeweils über einen Zeitraum von 100s und notierten dann die gemessenen Ereignisse:

r	A_{gemessen}	q	$A = \frac{A_{\text{gemessen}}}{q}$
10 cm	241 Bq	0,00175	137,7 kBq
6 cm	482 Bq	0,0040	120,5 kBq
2 cm	1674 Bq	0,020	83,7 kBq
1 cm	2472 Bq	0,045	54,9 kBq

In der Tabelle bezeichnet r den Abstand zwischen Quelle und Szintillationszähler. Dabei maßen wir nur die Abstände zwischen den Oberflächen. Der Korrekturfaktor q erhielt man aus dem Schaubild aus der Vorbereitungsmappe. Als Energie der γ -Strahlung nahmen wir 662 keV an.

Die Werte für die Aktivität variieren ziemlich stark um den Mittelwert $\bar{A} = 99,2$ kBq. Evtl. liegt das daran, dass wir den Abstand nur von den Oberflächen aus maßen. Dieser Gedanke liegt nahe, denn ein zusätzlicher Abstand (innerhalb der Probenfassung oder des Detektors) würde den q -Wert für kleine Abstände stärker absenken als bei großen Abständen. Um dies zu verdeutlichen wird (exemplarisch) mit einem zusätzlichen Abstand von 1 cm die Rechnung erneut vorgenommen:

r	A_{gemessen}	q	$A = \frac{A_{\text{gemessen}}}{q}$
10+1 cm	241 Bq	0,00175	137,7 kBq
6+1 cm	482 Bq	0,00375	128,5 kBq
2+1 cm	1674 Bq	0,0125	133,9 kBq
1+1 cm	2472 Bq	0,020	123,6 kBq

Vermutlich sind diese Werte deutlich realistischer, aber im Nachhinein lässt sich das nicht mehr exakt feststellen. Festgehalten werden kann, dass die oben (zuerst) berechneten Werte vermutlich wegen einer fehlerhaften Abstandsmessung zu fehlerhaften Ergebnissen führten.

¹vgl. Vorbereitung

3 Statistik

Nun soll die Untergrundstrahlung auf ihre statistische Verteilung untersucht werden. Dazu werden 150 Spektren über jeweils einem Zeitdauer von 1s gemessen. Gemäß der Vorbereitung werden anschließend zwei Stichproben gebildet:

1. die Gesamtzählrate durch Summation über alle Kanäle
2. eine Stichprobe durch Summation über Kanal 1-16, damit der Mittelwert bei ca. 3 liegt.

3.1 Gesamtzählrate

Bei Summation über das gesamte Spektrum erhielten wir folgende 150 Werte:

20, 17, 18, 21, 31, 22, 20, 6, 11, 17, 28, 23, 22, 24, 20, 16, 17, 23, 24, 22, 15, 17, 10, 22, 10, 23, 28, 17, 9, 28, 9, 16, 21, 10, 19, 13, 32, 19, 10, 14, 14, 28, 22, 14, 23, 38, 17, 19, 19, 28, 20, 16, 19, 18, 30, 18, 12, 27, 24, 20, 18, 19, 12, 22, 20, 17, 20, 24, 22, 13, 31, 10, 33, 22, 15, 14, 18, 16, 31, 22, 27, 22, 15, 20, 30, 33, 25, 20, 17, 31, 22, 20, 17, 28, 24, 35, 29, 27, 21, 22, 27, 22, 19, 19, 17, 12, 17, 20, 16, 23, 25, 28, 16, 25, 32, 21, 29, 24, 17, 13, 24, 19, 17, 22, 21, 16, 13, 13, 20, 26, 27, 12, 20, 9, 32, 17, 20, 16, 24, 22, 25, 16, 21, 12, 21, 11, 20, 18, 19, 21

Zählt man nun die einzelnen Vorkommen der Zerfallszahlen, so ergab sich folgenden Häufigkeitsverteilung:

Zerfälle	Häufigkeit	Zerfälle	Häufigkeit	Zerfälle	Häufigkeit
0	0	14	4	28	7
1	0	15	3	29	2
2	0	16	9	30	2
3	0	17	14	31	4
4	0	18	6	32	3
5	0	19	10	33	2
6	1	20	15	34	0
7	0	21	8	35	1
8	0	22	15	36	0
9	3	23	5	37	0
10	5	24	8	38	1
11	2	25	4	39	0
12	5	26	1	40	0
13	5	27	5		

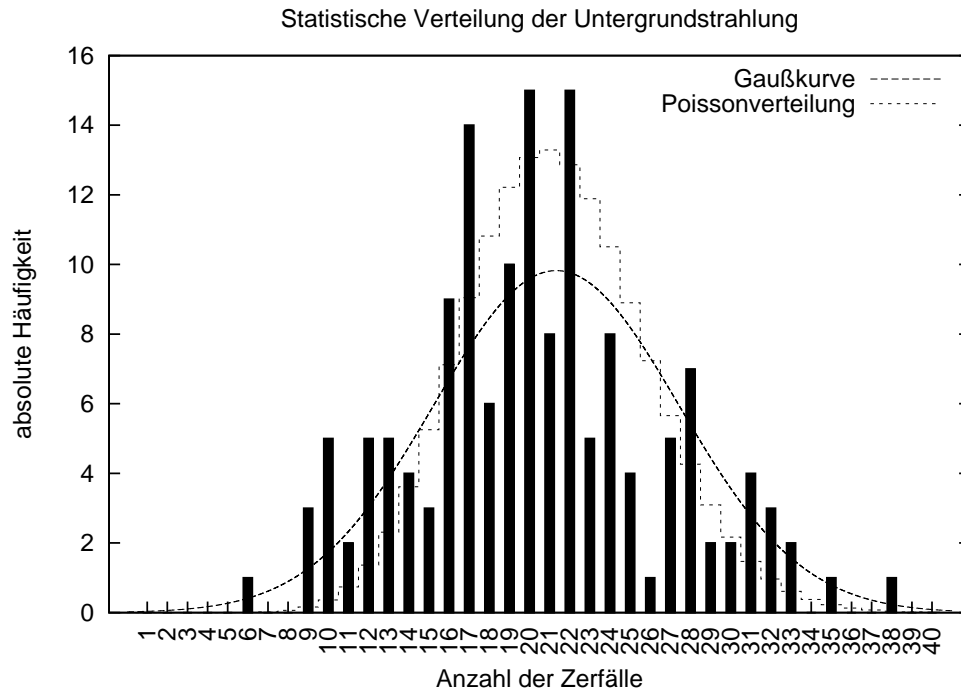
Berechnet man über die Formel aus der Vorbereitung den Mittelwert und die Standardabweichungen, so erhält man:

$$\bar{x} = 20,33 \quad \sigma_x = 6,091 \quad \sigma_{\bar{x}} = 0,4973$$

Der Wert für die Wurzel des Mittelwertes weicht deutlich von der Standardabweichung der Einzelmesswerte ab.

$$\sqrt{\bar{x}} = 4,509 \neq 6,091 = \sigma_x$$

Dies zeigt, dass die Verteilung von der Poissonverteilung abweicht. Dies sieht man auch, wenn man die gemessene Häufigkeit zusammen mit der Gauß- und Poissonverteilung grafisch darstellt:



3.2 Stichprobe über Kanal 1-16

Um eine Stichprobe zu erhalten, deren Mittelwert ungefähr bei 3 liegt, summierten wir von jedem Spektrum einzeln die Kanäle 1-16 auf. Bei dieser Summation erhielten wir folgende 150 Werte:

3, 0, 3, 3, 9, 3, 0, 0, 1, 3, 3, 7, 5, 4, 3, 1, 3, 3, 4, 5, 1, 4, 2, 5, 2, 7, 7, 3, 2, 8, 0, 2, 2, 1, 4, 0, 3, 1, 0, 3, 0, 5, 5, 1, 2, 6, 3, 10, 4, 3, 1, 3, 4, 2, 6, 3, 1, 6, 4, 6, 4, 4, 0, 4, 5, 3, 4, 1, 3, 3, 6, 0, 3, 4, 3, 0, 3, 2, 6, 1, 5, 5, 5, 3, 6, 3, 5, 3, 0, 2, 3, 3, 2, 4, 3, 4, 9, 2, 4, 5, 2, 4, 3, 4, 6, 1, 2, 2, 3, 2, 5, 5, 3, 3, 4, 4, 5, 3, 1, 2, 3, 2, 2, 2, 3, 4, 2, 1, 1, 7, 2, 4, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 5, 2, 4, 2, 0, 1, 2, 2, 3, 5, 5, 4

Zählt man nun die einzelnen Vorkommen der Zerfallszahlen, so ergab sich folgenden Häufigkeitsverteilung:

Zerfälle	Häufigkeit	Zerfälle	Häufigkeit
0	12	7	4
1	15	8	1
2	27	9	2
3	40	10	1
4	23	11	0
5	17	12	0
6	8	≥13	0

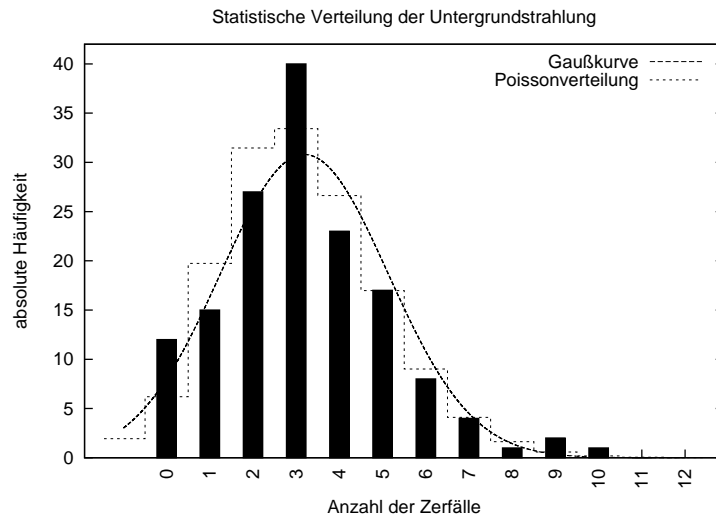
Für Mittelwert und die Standardabweichungen erhält man:

$$\bar{x} = 3,187 \quad \sigma_x = 1,943 \quad \sigma_{\bar{x}} = 0,1587$$

Der Wert für die Wurzel des Mittelwertes weicht wieder von der Standardabweichung der Einzelmesswerte ab. Allerdings ist diesmal die Abweichung deutlich geringer.

$$\sqrt{\bar{x}} = 1,785 \quad \neq \quad 1,943 = \sigma_x$$

Das die Poissonverteilung diesmal besser passt, erkennt man auch aus folgenden Schaubild, das die gemessene Häufigkeit zusammen mit der Gauß- und Poissonverteilung grafisch darstellt:



3.2.1 χ^2 -Tests

Berechnet man die zu erwartenden Ereignisse gemäß der Poisson- bzw. Gaußverteilung so erhält man:

Klassen k (Zerfälle)	gemessene Häufigkeit B_k	E_k (Poisson)	E_k (Gauß)
< 0	0	-	4,33
0	12	6,19	8,17
1	15	19,74	16,39
2	27	31,46	25,38
3	40	33,42	30,32
4	23	26,63	27,96
5	17	16,97	19,90
6	8	9,01	10,93
7	4	4,10	4,63
≥ 8	4	2,47	1,98

Da die Gaußkurve ein kontinuierliches Spektrum liefert, erhielten wir die diskreten Werte durch Integration:

$$E_k = \int_{k-0,5}^{k+0,5} d\tau \text{ Gauß}(\tau)$$

Bei den Werten für die Grenzen wurde dementsprechend von bzw. bis ∞ integriert. Bei der Poissonverteilung wurde für ≥ 8 alle Terme bis ∞ aufsummiert. Für die Poissonverteilung wird die Klasse < 0 natürlich nicht betrachtet, was dazu führt, dass für die beiden Verteilungen unterschiedlichen viele Klassen existieren. Allerdings werden bei der Gaußkurve auch zwei Parameter aus den Messdaten berechnet, während bei der Poissonverteilung nur der Mittelwert benötigt wird. Insgesamt ist in beiden Fällen die Anzahl der Freiheitsgrade 7:

$$\text{FG} = \underbrace{\overbrace{9}^{k \text{ Klassen}} - 1 - \overbrace{1}^{n \text{ Parameter}}}_{\text{Poisson}} = \underbrace{\overbrace{10}^{k \text{ Klassen}} - 1 - \overbrace{2}^{n \text{ Parameter}}}_{\text{Gauß}} = 7$$

Die Klasse „ ≥ 8 “ wurde gebildet, um nur ein einziges Mal² einen Wert für E_k kleiner als vier zu erhalten.

Berechnet man nun χ^2 über

$$\chi^2 = \sum_k \frac{(B_k - E_k)^2}{E_k}$$

so erhält man:

$$\chi_{\text{Poisson}}^2 = 10,07 \quad \chi_{\text{Gauß}}^2 = 13,66$$

In beiden Fällen liegt das berechnete χ^2 unter dem Grenzwert, ab dem man die theoretische Verteilung zu 95% hätte ausschließen können:

$$\chi_{\text{maximal}}^2 = 14,07$$

Anhand dieser Messdaten kann also weder die Gauß- noch die Poissonverteilung ausgeschlossen werden. Allerdings erkennt man auch eindeutig, dass die Gaußverteilung eindeutig die schlechtere Wahl darstellt, da sie auch für negative Werte Häufigkeiten angibt. Außerdem muss die Gaußverteilung (z.B. über Integrale) es diskretisiert werden, um aussagefähig Werte für den Zerfall zu liefern.

²laut Vorbereitungshilfe sind vereinzelt Werte unter 4 erlaubt