Versuchsvorbereitung P2-71: Der Kreisel

(Kreisel 1)

Kathrin Ender, Michael Walz
Gruppe 10

26. April 2008

Inhaltsverzeichnis

1 Drehimpulserhaltung

In diesem Demonstrationsversuchsteil soll mit Hilfe eines Drehschemels und eines Fahrradkreisels die Drehimpulserhaltung untersucht werden.

Für ein sich selbst überlassenes System[1] gilt die Drehimpulserhaltung.

$$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{L} = \text{const.}$$

Da eine auf dem Drehschemel sitzende Versuchsperson nur noch um die vertikale Achse rotieren kann (die anderen Bewegungen sind blockiert), gilt für dieses System auch nur die Erhaltung der vertikalen Drehimpulskomponente:

$$L_z = \text{const.}$$

Um die Drehimpulserhaltung zu zeigen, kann nun die ruhenden Versuchsperson den Fahrradkreisel (mit vertikaler Achse) in Rotation versetzen. Damit der Gesamtdrehimpuls ($\vec{L} = 0$) erhalten bleibt, muss sich der Experimentator auf dem Drehschemel in entgegengesetzter Richtung drehen.

Eine andere Möglichkeit wäre, der Versuchsperson den bereits rotierenden Fahrradkreisel mit horizontaler Figurenachse zu überreichen. In dieser Haltung verschwindet die L_z-Komponente des Fahrradkreisels. Dreht man nun die Figurenachse langsam in die Vertikale, so muss sich aus dem gleichen Grund der Experimentator auf dem Drehschemel wieder entgegengesetzt zum Fahrradkreisel bewegen.

2 Freie Achsen und Stabilität

Für ein Kreisel gelten die Eulersche Gleichungen,

$$\Theta_1 \dot{\omega}_1 + (\Theta_3 - \Theta_2)\,\omega_2\omega_3 = M_1 \qquad \text{und zyklisch}$$

dabei bezeichnet Θ_i das Hauptträgheitsmoment um die i-te Achse.

Im Versuch sollen nun die Rotationen um die Hauptachsen untersucht werden. Dazu kann man an einer „Zigarrenkiste“ in den Mitten der jeweiligen Seitenflächen einen Draht einspannen und so eine Rotation um die Achse anregen. Setzt man ein konstantes ω_i in die Eulergleichungen ein, so erhält man, dass die anderen ω_j $(i \neq j)$ verschwinden müssen. Untersucht man nun die Stabilität der Lösung[2], so erhält man die Gleichung:

$$\ddot{\omega}_j + H\omega_j = 0 \qquad \text{mit} \quad H = \prod_j \left(\frac{\Theta_i - \Theta_j}{\Theta_j}\right)\omega_i^2$$

Nun gibt es zwei Fälle:

$H > 0$: Es ergeben sich harmonische Schwingungen um die Gleichgewichtslage. Die Rotation um die i-te Achse ist stabil. Die Bedingung $H > 0$ bedeutet, dass Θ_i das größte oder das kleines Trägheitsmoment sein muss.

$H < 0$: Das Trägheitsmoment Θ_i ist das mittlere Trägheitsmoment. Es ergibt sich ein exponentiell ansteigender Lösungsterm. Die Rotation um die i-te Achse ist nicht stabil.

Zusätzlich kann man noch versuchen, bei der Rotation um die Achse mit dem kleinsten Trägheitsmoment, diese durch kleine Stöße so zu stören, dass sich die Rotation um die Achse mit dem größte Trägheitsmoment einstellt.

[1] sich selbst überlassen heißt, dass es keine äußeren Kräfte gibt

[2] Also kleine Variationen von ω_j; In der Realität ergeben sich diese Variationen immer automatisch.

3 Kräftefreier Kreisel – Messung der Nutationsfrequenz

Nun soll die Nutationsfrequenz des symmetrischen Kreisels in Abhängigkeit von der Drehfrequenz um die Figurenachse gemessen werden. Der im Versuch verwendete symmetrische Kreisel ist ein sogenannter Kardankreisel. Die eigentliche Kreiselscheibe ist in einem Kardanrahmen gelagert. Die Kreiselscheibe kann sich um ihre Figurenachse drehen. Die Figurenachse wiederum ist mit dem inneren Kardanrahmen verbunden der im äußeren Rahmen drehbar gelagert ist. Dieser äußere Rahmen ist drehbar auf der Bodenplatte gelagert. Durch Schiebegewichte lässt sich der Kreisel so austarieren, dass er kräftefrei ist. Der Kreisel heißt symmetrisch, da er rotationssymmetrisch um seine Figurenachse ist. Das heißt die Trägheitsmomente um die anderen beiden Hauptachsen sind gleich ($\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta$).

Der Kreisel wird zunächst von Hand aufgezogen. Die Nutationsbewegung wird durch leichtes Antippen des inneren Rahmens erreicht. Die Kreiselscheibe ist am Rand mit vier weißen und vier schwarzen Streifen versehen. Dieser Rand wird beleuchtet, so dass das von den weißen Streifen reflektierte Licht von einem Phototransistor aufgefangen werden kann. Dieser leitet die Impulse an einen Digitalzähler. Eine Umdrehung um die Figurenachse entspricht also 4 Impulsen. So kann die Rotationsfrequenz um die Figurenachse bestimmt werden.

Die Nutationsfrequenz wird ähnlich bestimmt. Man richtet eine Lampe auf den äußeren Kardanrahmen. Mittels einer Linse fokussiert man den Schatten des Kardanrahmens auf einen weiteren Phototransistor. Nutiert der Kreisel bewegt sich der Rahmen, so dass der Phototransistor aus dem Schatten und wieder in den Schatten kommt. Über diesen Wechsel kann die Nutationsfrequenz bestimmt werden.

Diese Frequenzmessungen sollen sowohl ohne als auch mit angebrachten Zusatzgewichten durchgeführt werden. Durch diese Zusatzgewichte können die verschiedenen symmetrischen Kreisel realisiert werden.

Für einen kleinen Öffnungswinkel des Nutationskegels (d.h. der Winkel zwischen Figurenachse und Drehimpulsachse ist klein) gilt näherungsweise folgender Zusammenhang:

$$\omega_N = \frac{\Theta_3}{\Theta} \cdot \omega$$

ω_N Nutationsfrequenz, ω Rotationsfrequenz um die Figurenachse, Θ_3 Trägheitsmoment um die Figurenachse, Θ Trägheitsmoment um die anderen beiden Achsen

Bei einem abgeplatteten Kreisel ($\Theta_3 > \Theta$) gilt $\omega_N > \omega$. Beim verlängerten Kreisel ($\Theta_3 < \Theta$) gilt $\omega_N < \omega$.

Bei der oben genannten Formel geht man allerdings davon aus, dass der Kreisel sich vollkommen frei, also auch ohne Rahmen drehen kann. In unserem Versuch sind allerdings noch die Trägheitsmomente des Rahmen zu beachten. So kommt man zu den korrigierten Trägheitsmomenten:

$$\Theta_1^{\text{korr}} = \Theta + \Theta_1^{\text{Innenkardan}} + \Theta_1^{\text{Außenkardan}}$$

$$\Theta_2^{\text{korr}} = \Theta + \Theta_2^{\text{Innenkardan}}$$

Die oben genannte Formel wird dann zu:

$$\omega_N = \frac{\Theta_3}{\sqrt{\Theta_1^{\text{korr}} \cdot \Theta_2^{\text{korr}}}} \cdot \omega$$

4 Dämpfung des Kreisel

Nun soll die zeitliche Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit der Rotation um die Figurenachse untersucht werden. Die Winkelgeschwindigkeit wird, über die Zeit betrachtet, wegen

Reibungseffekten abnehmen. Wie bei allen harmonischen Schwingungen mit Dämpfungen erwarten wir eine exponentiell abfallende Kurve. Die Messung der Winkelgeschwindigkeit erfolgt analog zur Aufgabe 3. Der Kreisel wird durch die Handkurbel bis auf maximal 25 Hz aufgezogen.

5 Kreisel unter dem Einfluss äußerer Drehmomente

Auf den Kreisel soll nun ein Drehmoment wirken. Dieses äußere Drehmoment erreichen wir durch Anbringen von Zusatzmassen am Lager der Figurenachse. Das resultierende Drehmoment steht also senkrecht zum Drehimpulsvektor.

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \perp \quad \vec{L}$$

Daraus folgt, dass sowohl der Betrag des Gesamtdrehimpulses als auch die z-Komponente erhalten ist, die x und die y-Komponente aber variieren. Der Drehimpulsvektor präzediert daher um die z-Achse. Für den Kreisel bedeutet das eine Drehung um die z-Achse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit. Die Winkelgeschwindigkeit dieser Präzession ω_p soll in Abhängigkeit von der Rotationsfrequenz um die Figurenachse bestimmt werden. Es werden jeweils viertel oder halbe Umdrehungen des Kardanrahmens um die z-Achse gemessen. Da die Präzessionsfrequenz nicht sehr groß ist kann die Messung mit einer Stoppuhr durchgeführt werden. Gleichzeitig misst man die Rotationsfrequenz mit der selben Methode wie in Aufgabe 3. Für die Präzessionsgeschwindigkeit gilt folgender Zusammenhang.

$$\omega_p = \frac{M}{\omega \cdot \Theta_3}$$

Die beiden Drehmomente, die durch die Zusatzmassen erzeugte werden, sind (vgl. Vorbereitungshilfen):

$$M_1 = 0{,}0385\,\mathrm{Nm} \qquad M_2 = 0{,}127\,\mathrm{Nm}$$

6 Hauptträgheitsmomente

Nun soll aus den Ergebnissen von Aufgabe 3 und 5 die Hauptträgheitsmomente des symmetrischen Kreisels berechnet werden. Dazu benutzt man die obigen Formeln und löst nach den Trägheitsmomenten auf. Zu beachten ist, dass (vgl. Aufgabe 3) die beiden Trägheitsmomente der Kardanrahmen abgezogen werden müssen.

Dazu rechnet man zuerst aus den Ergebnissen der Aufgabe 5 den Wert für Θ_3 aus, indem man die Präzessionsfrequenz ω_p über $1/\omega$ in einer linearen Regression aufträgt:

$$\omega_p = \underbrace{\frac{M}{\Theta_3}}_{\text{Steigung der Regression}} \cdot \frac{1}{\omega}$$

Anschließend kann man zusammen mit den Ergebnisse aus Aufgabe 3 die Trägheitsmomente für die anderen Achsen berechnen, indem man die Nutationsfrequenz ω_N über die Rotationsfrequenz ω aufträgt:

$$\omega_N = \underbrace{\frac{\Theta_3}{\sqrt{\Theta_1^{\mathrm{korr}} \cdot \Theta_2^{\mathrm{korr}}}}}_{\text{Steigung der Regression}} \cdot \omega$$

Für eine Abschätzung der Masse des Rotors können wir verwenden, dass dieser näherungsweise ein Zylinder ist, und damit sein Trägheitsmoment um die vertikale Achse $\Theta_3 = \frac{1}{2}MR^2$ ist. Durch Messen des Radius R dieser Scheibe können wir auf seine Masse M schließen.

7 Kreiselkompass

In diesem Aufgabenteil soll ein Kreiselkompass nachgestellt werden. Dazu wird der innere Kardanrahmen an die Horizontalebene gefesselt und der Kreisel auf einen Drehtisch gestellt. Die Figurenachse und der Drehimpulsvektor sind damit parallel zum Boden und damit senkrecht zur Drehachse des Drehtischs. Beim Einschalten des Drehtischs passiert daher praktisch nichts. Dies liegt daran, dass das angreifende Drehmoment den Kreisel aus der horizontalen Achse drehen will; dies ist aber nicht möglich, da der innere Kardanrahmen fixiert wurde. Diese Situation entspricht der eines Kreiselkompasses am Nordpol. Um andere geografische Breiten zu simulieren, stellen wir einen Holzkeil unter den Kreisel, sodass dieser schief steht. Bei eingeschaltetem Drehtisch (und rotierendem Kreisel) wird das angreifende Drehmoment den Kreisel so bewegen, dass seine Figurenachse nach „Norden“, also entlang der Steigung des Holzblocks, zeigt. Auf der Erde ist der Kreiselkompass ebenfalls auf die Horizontale beschränkt. Seine Figurenachse ist also immer parallel zur Erdoberfläche. Durch das hier wirkende Drehmoment

$$\vec{M} = \vec{L}_{\text{Kreisel}} \times \vec{\omega}_{\text{Erde}}$$

wird der Kreisel immer nach Norden ausgerichtet.