Versuchsvorbereitung P1-13: Galvanometer

Michael Walz
Gruppe 10

4. November 2007

Inhaltsverzeichnis

0 Grundlagen

Ein Galvanometer ist ein sehr empflindliches Strommessgerät. Es besteht aus einer Spule, die auf einer Feder gelagert ist. Diese Anordnung befindet sich im Magnetfeld eines Permanetmagneten. Fließt Strom durch die Spule, so entsteht durch die Loretzkraft ein Drehmoment, das die Spule senkrecht zum Magnetfeld ausrichten will. Über die Feder entsteht ein rücktreibendes Drehmoment, sodass im Allgemeinen eine gedämpfte Schwingung um die Gleichgewichtslage von Lorentzkraft und Rückstellkraft ausgeführt wird.

Über Reflexion an einen an der Spule befestigten Spiegel gelangt ein Lichtstrahl auf einen Schirm, an dem die Auslenkungen abgelessen werden können. Durch die Reflexion verdoppelt sich der Auslenkwinkel.

Die allgemeine Schwingungsgleichung des gedämpften Galvanometers lautet:

$$\Theta\ddot{\varphi} + \left(\rho + \frac{G^2}{R_G + R_a}\right)\dot{\varphi} + D\varphi = G \cdot I$$

- Θ: Trägheitsmoment der Spule
- ρ: mechanische Dämpfungskonstante
- G: Galvanometerkonstante
  (Beim idealen Galvanometer gilt: $G = \Phi =$ Magnetischer Fluss durch die Spule)
- R_G: Innenwiderstand des Galvanometers
  (Generell bezeichnet der Index G immer das Galvanometer. I_G ist z.B. der Strom, der durch das Galvanometer fließt.)
- R_a: Widerstand zwischen den beiden Anschlüssen des Galvanometers
- D: Die Rückstellkonstante der Feder

Wenn $I =$ const. gilt, kann man einfach die Transformation $\varphi \to \varphi + \frac{D}{G} \cdot I$ durchführen und zusätzlich folgenden Konstanten zur Vereinfachung zusammenziehen:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{\Theta}} \qquad \beta = \frac{1}{2\Theta}\left(\rho + \frac{G^2}{R_G + R_a}\right)$$

Nach leichtem Umformen erhalten wir die allgemeine Differentialgleichung für eine nicht erzwungene Schwingung:

$$\ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0$$

Eine solche DGL lässt sich ganz einfach über den Ansatz $\varphi = e^{-\lambda t}$ ($\lambda \in \mathbb{C}$) lösen. Wir erhalten folgenden Lösung und drei qualitativ verschiedene Fälle.

$$\lambda_{1,2} = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

Schwingfall ($\beta < \omega_0$): Der Normalfall einer Schwingung. Das System schwingt mehrmals um die Gleichgewichtslage, bis es auf Grund der Dämpfung in dieser zum Stillstand kommt.

Kriechfall ($\beta > \omega_0$): iDe Dämpfung ist so stark, dass die Nulllage (theoretisch) nie erreicht wird. Das System nähert sich mit exponentiell abnehmender Geschwindigkeit dem Nullpunkt an.

aperiodischer Grenzfall ($\beta = \omega_0$): Grenzfall zwischen Kriech- und Schwingfall. Das System schwingt nicht über den Nullpunkt hinweg. Allerdings wird der Nullpunktes wesentlich schneller als im Kriechfall erreicht.

Da das Galvanometer ein sehr empflindliches Strommessgerät ist, darf man den Innenwiderstand R_G auf keinen Fall mit einem der üblichen Ohmmeter messen, da dabei Ströme auftreten würden, die das Galvanometer höchst wahrscheinlich beschädigen oder gar zerstören würden.

1 Vorexperimente

In den Vorexperimenten soll die hohe Empfindlichkeit des Galvanometers erkundet werden. Das Galvanometer ist ein sehr empflindliches Messgerät, sodass wir zuerst ein Gespür dafür entwickeln müssen.

1.1 Körperspannung

Dazu wird das Galvanometer an einen menschlichen Körper angeschlossen. Der eine Anschluss wird in die rechte, der andere in die linke Hand genommen. Es ist ein kleiner Ausschlag zu erwarten, da im Menschen kleine elektrische Ströme fließen, die zu einem Spannungsunterschied zwischen linker und rechter Hand führen. Der Effekt ist zwar sehr klein, aber vermutlich groß genug, um durch ein Galvanometer messbar zu sein.

1.2 Drahtdrehwiderstand

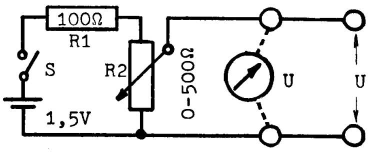
Nun schließen wir das Galvanometer an einen Drahtdrehwiderstand mit z.B: $100\,\Omega$-Gesamtwiderstand an. Durch schnelles Drehen am Widerstand müsste eine Ladungstrennung erfolgen, die man mit dem Galvanometer nachweisen kann. Hierbei sollte sich auch die Richtung des Ausschlages durch die Drehrichtung am Widerstand beeinflussen lassen.

1.3 Nulllage mit/ohne Widerstand

Nun vergleichen wir die Ruhelage des Galvanometers bei angeschlossenem Widerstand mit der Ruhelage, die ohne Anschluss vorliegt. Beim Anschluss (bzw. auch beim Abklemmen) des Widerstands könnte ein Anschlag erkennbar sein. Dies lässt sich wie bei der vorherigen Aufgabe durch die Ladungstrennung erklären. Nach erfolgreichem Einpendel der Nulllage sollten beide Nulllagen identisch sein. Das Einpendeln kann durch die unterschiedliche Dämpfung verschieden lange andauern.

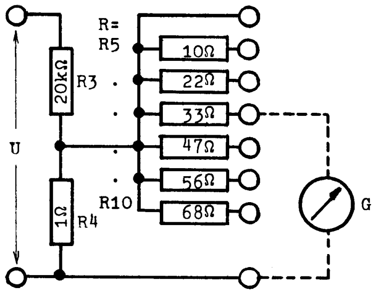
2 Galvanometerausschlag α

In alle folgenden Versuchen wird die Versorungsspannung U durch einen Spannungsteiler nach Abbildung 1 realisiert. Hier sind ein fester Widerstand ($R1 = 100\,\Omega$) und ein einstellbarer Widerstand $R2 = 0 - 500\,\Omega$ in Reihe geschaltet. Die Spannungsquelle ist eine 1,5 V-Batterie, sodass an den Anschlüssen Spannungen von 0 V bis 1,25 V[1] eingestellt werden können. Diese Eingangsspannung wird im Weiteren mit U bezeichnet.



[1] vorrausgesetzt, dass der Widerstand der angeschlossenen Schaltung sehr groß im Vergleich zum einstellbaren Widerstand $R2$ ist, sodass für den Widerstand der Parallelschaltung aus $R2$ und der angeschlossenen Schaltung $R \approx R2$ gilt.

2.1 Ausschlagsmessung α in Abhängigkeit vom Vorwiderstand R



Zuerst wird die Schaltung nach Abbildung 2 aufgebaut. An den obigen Spannungsteiler werden die in Reihe geschalteten Widerstände $R3 = 20\,\mathrm{k\Omega}$ und $R4 = 1\,\Omega$ gelegt. Parallel zu $R4$ wird das Galvanometer mit einem austauschbaren Vorwiderstand R angeschlossen. Da $R4 \ll R3$ gilt[2] (Die Genauigkeit von $R3$ liegt bei $\pm 300\,\Omega$. Der Widerstand $R4 = 1\,\Omega$ kann deshalb vernachlässigt werden), gilt für den Gesamtstrom:

$$I_{\text{ges}} = \frac{U}{R3}$$

Nach Kirchhoff gilt in der Masche $R4$-R-R_G:

$$I' + I_G = I_{\text{ges}} \qquad R4 \cdot I' = (R + R_G) \cdot I_G$$

Daraus folgt sofort:

$$I_G = U \cdot \frac{R4}{R3} \cdot \frac{1}{R + R_G + R4}$$

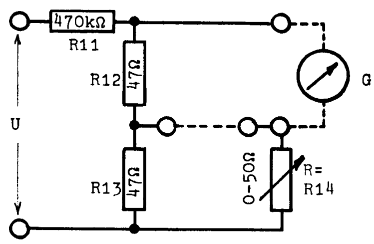
Über die Verknüpfung der Auslenkung $\alpha = C_I \cdot I_G$ mit der Stromstärke I_G über die Stromempfindlichkeit C_I kommen wir auf:

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{C_I \cdot I_G} = \frac{R3}{R4 \cdot C_I \cdot U} \cdot (R + R_G + R4) = \underbrace{\frac{R3}{R4 \cdot C_I \cdot U}}_{B} \cdot R + \underbrace{\frac{R3 \cdot (R_G + R4)}{R4 \cdot C_I \cdot U}}_{A}$$

Wir erkennnen also einen linearen Zusammenhang zwischen α^{-1} und R. Nach Berechnen der Ausgleichsgerade $\alpha^{-1} = A + B \cdot R$ lassen sich nun der Galvanometer-Innenwiderstand R_G und die statische Stromempflindlichkeit berechnen:

$$C_I = \frac{R3}{R4 \cdot U \cdot B} \qquad\qquad R_G = \frac{A}{B} - R4$$

2.2 Bestimmung des Innenwiderstands über Brückendiagonale



Wir betrachten nun Schaltung 3, bei der zwei in Reihe geschaltete $47\,\Omega$-Widerstände ($R12$ und $R13$) auf der einen Seite mit der Seite des Galvanometers, das hier in Reihe mit einem regelbaren Widerstand ($R14 = 0{-}50\,\Omega$)) geschaltet ist, parallel geschaltet sind. Jeweils zwischen den beiden Reihenschaltungen sind Anschlüsse vorhanden, sodass hier durch Verbinden mit einem Kabel eine s.g. Wheatstone'sche Brücke eingerichtet werden kann.

Gemessen wird nun wieder der Ausschlag α bei verbundener und offener Brücke in Abhängigkeit vom regelbaren Widerstand $R = R14$. Anschließend wird für beide Fälle wieder die Regressionsgerade α^{-1} über R aufgetragen. Die beiden Ausgleichsgeraden schneiden sich einem Punkt. An diesem Punkt macht es keine Unterschied, ob die Brücke eingesteckt ist, oder nicht. Deshalb fließt hier keine Strom über die Wheatstone'sche Brücke. Dies bedeutet, dass das Potential an den beiden Anschlüssen identisch ist. Damit ist das Verhältnis der linken Widerstände gleich dem Verhältnis zwischen Galvanometer und Drehwiderstand. Da $R12 = R13$

[2]Durch Betrachten des parallelgeschaltete Galvanometer würde der Widerstand von $R4$ noch kleiner, sodass dieser Effekt vernachlässigt werden kann.

gilt, kann durch Ablesen der Abszisse R des Schnittpunktes der (Innen)-Widerstand R_G des Galvanometers bestimmt werden.

$$R_G = \frac{R12}{R13} \cdot R = R \qquad \text{(am Schnittpunkt)}$$

2.3 Stromempfindlichkeit C_I

In Schaltung 4 ist das Galvanometer in Reihe mit dem Widerstand $R15 = 470\,\mathrm{k\Omega}$ geschaltet. R_a ist so gestellt, dass keine Verbindung der beiden Anschlüsse vorliegen ($R_a = \infty$). Gemessen wird der Ausschlag α in Abhängigkeit zum Strom I_G, der von der angelegten Spannung U abhängt. Für den Strom, der durch das Galvanometer fließt, gilt:

$$I_G = \frac{U}{R15 + R_G} = \frac{U}{R15}$$

Der Fehler, der durch das Vernachlässigen des Galvanometers entsteht, ist weniger als ein Hundertstel des Fehlers, mit dem der Widerstand R15 behaftet ist und kann daher getrost vernachlässigt werden.

$$\alpha = I_G \cdot \underbrace{C_I}_{B}$$

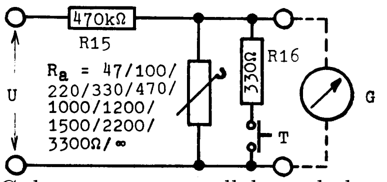
Wir erstellen eine Ausgleichsgerade $\alpha = B \cdot I_G + A$ für die gemessenen Ausschläge und die berechneten Stromstärken und können damit die Stromempflindlichkeit C_I ablesen:

$$C_I = B$$

Analog dazu ließe sich die statische Spannungsempflindlichkeit C_U des Galvanometers berechnen:

$$\alpha = U_G \cdot C_U \qquad \Rightarrow \qquad C_U = \frac{\alpha}{U_G}$$

3 Bestimmen der Galvanometer-Kenngrößen



Wir messen nun wieder in Schaltung 4. Allerdings wird nun nicht mehr der statische Fall, sondern das Zurückschwingen zum Nullpunkt untersucht. Deshalb erfolgt die Messreihe diesmal nicht in Abhängigkeit der Spannung, sondern in Abhängigkeit zum Außenwiderstand R_a.

Der Widerstand $R16$ kann über einen Taster T zum Galvanometer parallel geschaltet werden. Damit erreicht man eine Dämpfung nahe des aperiodische Grenzfalles, sodass die Einpendelzeit beim Anlegen der Spannung deutlich reduziert werden kann. Nach Einpendeln des Ausschlages wird die Stannungsquelle entfernt und wir messen die maximalen Ausschläge und die Gesamtschwingdauer T_{ges} der Schwingung um die Nulllage und berechnen die folgenden Größen:

- Das Dämpfungsverhältnis k berechnet sich aus den maximalen Ausschlägen des Zeigers[3], die an den Eckpunkten von n Perioden gemessen wurden:

$$k = \left(\frac{\alpha_{i-n}}{\alpha_i}\right)^{\frac{1}{n}}$$

[3] Allerdings dürfen entweder immer nur rechte oder immer nur linke Ausschläge bei dieser Berechnung betrachtet werden

- Die Schwingungsdauer T wird aus der Gesamtschwingzeit und der Anzahl der Perioden berechnet:
$$T = \frac{T_{\text{ges}}}{n}$$

- Die Abklingkonstante $\beta = \frac{\ln(k)}{T}$: Wir tragen anschließend $(\beta_{R_a} - \beta_\infty)^{-1}$ über dem Außenwiderstand R_a auf und berechnen die Ausgleichsgerade $(\beta_{R_a} - \beta_\infty)^{-1} = A + B \cdot R_a$ Als zusätzliches Wertepaar kann $(-R_G, 0)$ benutzt werden.

- Die Frequenz des ungedämpften Galvanometers ω_0:
$$\omega_0 = \sqrt{\omega_\infty^2 + \beta_\infty^2} = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{T_\infty}\right)^2 + \beta_\infty^2}$$

- Den Außenwiderstand $R_{a,gr}$ für den aperiodischen Grenzfall. Da in diesem Fall $\beta = \omega_0$ gilt, kann der Widerstand bei $(\omega_0 - \beta_\infty)^{-1}$ im oben erstellten Schaubild abgelesen werden.

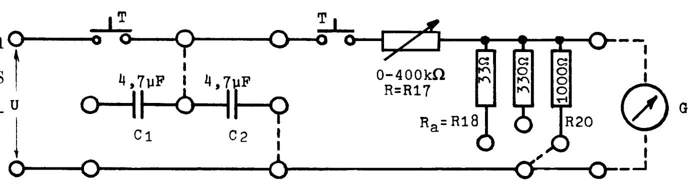
- Die Galvanometer-Kenngroßen G, Θ und D mit Hilfe der bereits berechneten Regressionsgeraden: Aus der Schwingsdifferentialgleichung des Galvanometers folgt:
$$\beta = \frac{1}{2\Theta}\left(\rho + \frac{G^2}{R_G + R_a}\right) = \beta_\infty + \frac{1}{2\Theta}\frac{G^2}{R_G + R_a}$$
β_∞ bezeichnet die rein mechanische Dämpfung, die ohne zusätzliche Dämpfung durch einen Außenwiderstand auftritt.
$$(\beta - \beta_\infty)^{-1} = \frac{2\Theta(R_G + R_a)}{G^2} = \underbrace{\frac{2\Theta}{G^2}}_{B} \cdot R_a + \underbrace{\frac{2\Theta R_G}{G^2}}_{A}$$
Dies ist die oben berechnete Regressionsgerade. Die Kenngrößen lassen sich damit unter Benutzung von $\omega_0^2 = \frac{D}{\Theta}$ und $C_I = \frac{G}{D}$ wie folgt berechnen:
$$G = \frac{2}{\omega_0^2 \cdot C_I \cdot B} \qquad \Theta = \frac{2}{\omega_0^4 \cdot C_I^2 \cdot B} \qquad D = \frac{2}{\omega_0^2 \cdot C_I^2 \cdot B}$$

Bemerkung: In dieser Aufgabe muss C_I in „Bogenmaß pro Stromstärke“ und nicht wie in den Aufgabe 2.1-2.3 angegeben werden!

4 Stromstöße

In diesem Versuch wird das Verhalten des Galvanometers bei kurzen Stromstößen untersucht. Wir verwerden dazu Kondensatoren (vgl. Schaltung 5), die sich exponentiell über einen Vorwiderstand $R = R17$ entladen. Die Zeit von $t = 3RC$, nach der ca. 95% der Ladung abgeflossen sind, betrachten wird als Stromstoßdauer T_Q; auch wenn theoretisch der Stromfluss erst im Unendlichen verschwindet.

Wenn man stärkere Dämpfungen als β_∞ betrachten will, so muss man über R_a Widerstände parallel zum Galvanometer schalten.



Dabei ist zu beachten, dass dann nicht die die gesamte Ladung sondern nur ein Bruchteil durch das Galvanometer fließt:

$$Q_G = \frac{C \cdot U}{1 + \frac{R_G}{R_a}} \underbrace{= C \cdot U}_{\text{für } R_a \to \infty}$$

Die ballistische Empflindlichkeit C_b berechnet sich analog zur Stromempfindlichkeit C_I:

$$C_b = \frac{\alpha}{Q_G}$$

Wir betrachten drei verschiedene Fälle, in denen sich die Empfindlichkeit auch aus bereits bekannten Größen berechnet lässt. Die Formel folgen aus dem Formelblatt:

- Schwingfall ($R_a = \infty, R_a = 1000\,\Omega$):

$$C_b = \frac{G}{\Theta \cdot \omega_0}$$

- aperiodischer Grenzfall ($R_a = 330\,\Omega$):

$$C_b = \frac{G}{\Theta \cdot \omega_0 \cdot e}$$

- Kriechfall ($R_a = 33\,\Omega$):

$$C_b = \frac{R_G + R_a}{G}$$

Wenn die ballistische Empflindlichkeit C_b bereits bekannt wäre, kann man über den Maximalausschlag die geflossene Strommenge berechnen. Dies ist analog zur Mechanik, wo man aus der Auslenkung eines von einer Kugel getroffenen Pendels[4] über die Impulserhaltung auf die Geschwindigkeit der Kugel schließen kann.

Bemerkung: Analog zur Aufgabe 3 muss in dieser Aufgabe α im „Bogenmaß“ und nicht wie in den Aufgabe 2.1-2.3 angegeben werden!

5 Fragen

Die Fragen wurden im Fließtext an den passenden Stellen beantwortet.

[4] z.B: eines Sandsackes