Versuchsauswertung P1-13: Galvanometer

Kathrin Ender, Michael Walz
Gruppe 10

9. November 2007

Inhaltsverzeichnis

0 Zur Auswertung

Alle Messwerte befinden sich im handgeschrieben angehängten Versuchsprotokoll. Diese Werte wurden am Computer abgetippt und dem Programm GNUPLOT[1] zur linearen Regression übergeben und die Werte für Steigung, Y-Achsenabschnitt und den statistischen Fehler der beiden von dort übernommen. GNUPLOT nutzt zur linearen Regression die Formeln 16–18 aus dem Fehlerrechnungsskript zum Praktikum. Für den Fall einer gewichteten Regression rechnet GNUPLOT nach den Formel 19 und 20.

Die meisten Messwerte mussten aufgrund der Ableseskalen (oder aus sonstigen Gründen) noch umgerechnet werden. Aufgrund des massiven Rechenaufwandes erledigten wir dies direkt am Computer unter GNUPLOT mittels der Option „using"[2]; sowohl bei der Regression (über „fit") wie auch beim Erstellen der Graphen (über „plot").

Für die Fehlerfortpflanzung von statistischen Fehlern wird im Allgemeinen das Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz (Formel 4 im Fehlerrechnungsskript) benutzt. Für systematische Fehler muss, da die statistische Unabhängigkeit dieser Messabweichungen nicht gegeben ist, eine Größtfehlerabschätzung nach Formel 5 vorgenommen werden.

Im Allgemeinen werden wir Messwerte in der folgenden Form angeben:

$$\text{Messwert} = (\text{Bestwert} \pm \text{statistischer Fehler} \pm \text{systematischer Fehler})\,\text{Maßeinheit}$$

Die Widerstandswerte, die im Fließtext auftauchen, beziehen sich immer auf die Richtwerte, die auch in den Schaltungsbilder eingetragen sind. Bei der Berechnung wurden selbstverständlich die Werte und Fehler für die Widerstände und Kondensatoren vom beiliegenden Datenblatt verwendet.

1 Vorexperimente

1.1 Körperspannung

Nahm man die Anschlüsse des Galvanometers in die Hand so entstand wie erwartet ein Auschlag von bis zu ca. 22mm. Das Galvanometer ist also tatsächlich in der Lage auch die geringen Körperströme zu messen. Diese Ströme entstehen druch statische Aufladung.

1.2 Drahtdrehwiderstand

Nun sollte das Galvanometer an einen Drehwiderstand angeschlossen werden und es sollte beobachtet werden, was passiert, wenn man am den Wert des Widerstandes ändert. Zuerst schlossen wir das Galvanometer an den Drehwiderstand $R_{17} = 0 - 400k\Omega$ an. Der beim Drehen am Widerstand erwartete Ausschlag blieb aus. Dies liegt wahrscheinlich daran, dass der Drehwiderstand mit bis zu $400k\Omega$ sehr groß ist. Als wir das Experiment mit dem Drehwiderstand aus Schaltung 1 (Batterie nich angeschlossen) wiederholten, war der erwartete Ausschlag zu beobachten. Die durch die Reibung am Schleifkontakt erzeugten Ladungen führten zum Stromfluss. Dieser Widerstand ist mit bis zu 500Ω deutlich kleiner als der zuerst verwendete.

1.3 Nullage mit/ohne Widerstand

Wie zu erwarten war kein Unterschied zwischen der Nulllage mit und ohne Drehwiderstand festzustellen. Was jedoch bei genauerer Betrachtung der Nullage deutlich wurde, war dass sie

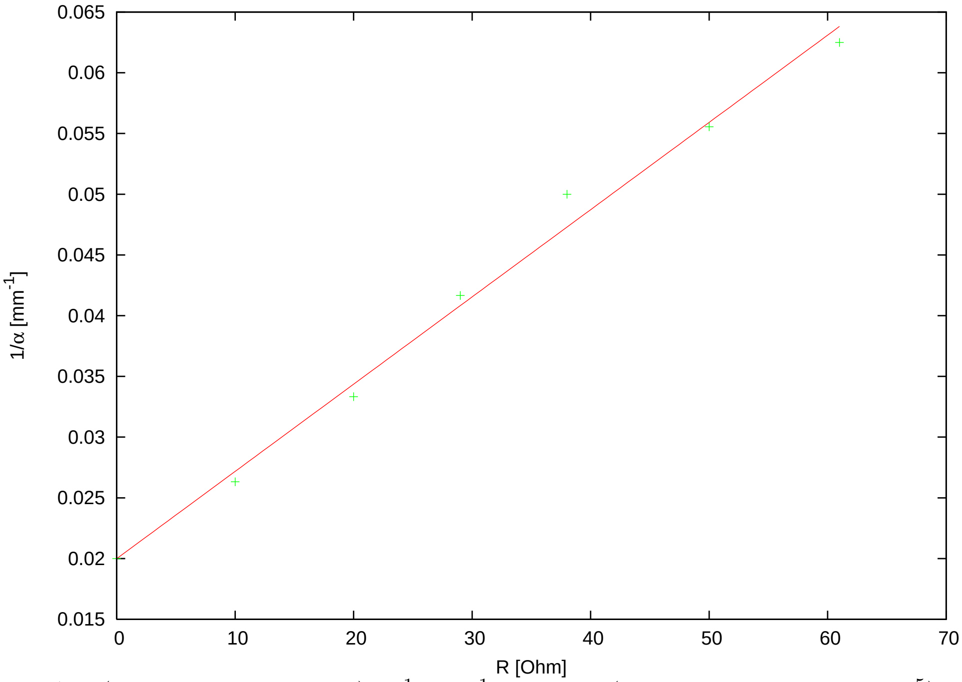
[1] http://www.gnuplot.info/
[2] http://www.gnuplot.info/docs/node133.html

generell driftet. Dieses Problem trat allerdings nur zu Anfang des Versuches auf. Gegen Ende war fast kein Nulllagendrift mehr festzustellen. Eine mögliche Erklärung für dieses Phänomen konnte sein, dass das Galvanometer erstmal „warm“ laufen muss. So könnte die Nulllage z.B. wandern, da sich die Spule durch den Stromfluss aufheizt und daher ausdehnt.

2 Galvanometerausschlag α

2.1 Ausschlagsmessung α in Abhängigkeit vom Vorwiderstand R

Aus der Messung des Galvanometerausschlages in Abhängigkeit vom Vorwiderstand in Schaltung 2 sollten durch lineare Regression die Stromempfindlichkeit und der Galvanometerinnenwiderstand bestimmt werden. Bei der linearen Regression trägt man den reziproken Ausschlag gegen den Vorwiderstand auf. Mit Hilfe von gnuplot wurde die folgende Regression erstellt ($1/\alpha = A + B * R$):



mit $A = (0{,}0199901 \pm 0{,}001032)\Omega^{-1}mm^{-1}$ $\quad B = (0{,}000718465 \pm 2{,}877 \cdot 10^{-5})mm^{-1}$
Die Parameter A und B und deren bei der linearen Regression auftretenden statistischen Fehler berechnet gnuplot nach demselben Prinzip wie die Formeln (16)-(18) im Fehlerrechnungsskript.

Die statische Stromempfindlichkeit C_I und der Innenwiderstand des Galvanometers R_G, lassen sich wie in der Vorbereitung beschrieben aus A und B berechnen. Die genauen Werte für R_3 und R_4 wurden aus dem Werteblatt der Aufgabenstellung entnommen. Die Spannung betrug während der Messung in etwa $U = 0{,}602V$ (es handelt sich hierbei um einen gemittelten Wert, der wahre Wert von U schwankte zwischen 0,6V und 0,604V). Beim Spannungsmessgerät verwendeten wir den Vorwiderstand für 1V-Messbereich. Die Nulllage des Galvanometers wurde vor jeder Messung kontrolliert und notiert, so dass wir sie von unseren Messwerten für den Ausschlag abziehen konnten. Diese Nulllagenkontrolle wurde bei allen folgenden Messungen durchgeführt und wird nicht immer explizit erwähnt.

Stromempfindlichkeit

$$C_I = \frac{R_3}{R_4 U B} = 44{,}352 \cdot 10^3 \frac{m}{A}$$

Der systematische Fehler von C_I wird aus der Formel(5) (Größtfehlerabschätzung) aus dem Fehlerrechnungsskript berechnet.

$$\Delta C_I^{sys} = C_I \cdot \left(\underbrace{\frac{\Delta R_3^{sys}}{R_3}}_{=0{,}015} + \underbrace{\frac{\Delta R_4^{sys}}{R_4}}_{=0{,}015} + \underbrace{\frac{\Delta U^{sys}}{U}}_{0{,}01V/0{,}602V} \right) = 2067 \frac{m}{A}$$

Den statistischen Fehler kann man mittels der Gaußschenfehlerfortpflanzung berechnen (Formel (4)). Hierbei liefert nur die Steigung B einen Fehlerbeitrag, da der statistische Fehler von U sehr klein ist, so dass er vernachlässigt werden kann.

$$\sigma_{C_I}^{stat} = C_I \cdot \frac{\sigma_B}{B} = 1776 \frac{m}{A}$$

Damit ergibt sich für die Stromempfinglichkeit:

$$C_I = (44{,}4 \pm 1{,}8 \pm 2{,}0) \cdot 10^3 \frac{m}{A}$$

Rechnet man C_I nun in $\frac{rad}{A}$ um so erhält man $C_I = 88000 \frac{rad}{A}$. Dies liegt in der zu erwartenden Größenordnung für C_I ($C_I \approx 10^5 \frac{rad}{A}$ laut Aufgabenblatt).

Innenwiderstand

$$R_G = \frac{A R_4 U C_I}{R_3} - R_4 = 26{,}783\Omega$$

Den systematischen Fehler berechnet man wieder mit Hilfe der Größtfehlerabschätzung:

$$\Delta R_G^{sys} = \left(\frac{\Delta R_4^{sys}}{R_4} + \frac{\Delta R_3^{sys}}{R_3} + \frac{\Delta U^{sys}}{U} + \frac{\Delta C_I^{sys}}{C_I} \right) \cdot R_G + \Delta R_4^{sys} = 2{,}51\Omega$$

Den statistischen Fehler berechnet man über die Fehlerfortpflanzung:

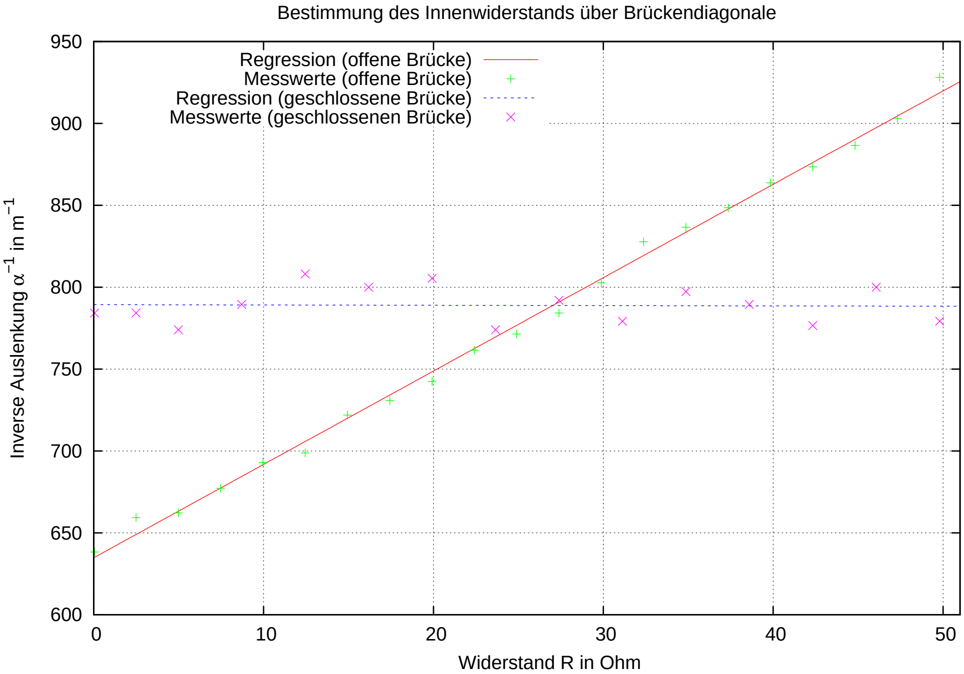
$$\sigma_{R_G}^{stat} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_A}{A}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_B}{B}\right)^2} \cdot R_G = 1{,}75\Omega$$

$$\Rightarrow R_G = (26{,}78 \pm 1{,}75 \pm 2{,}51)\Omega$$

Laut Herstellerangaben hat das Galvanometer einen Innewiderstand von 28Ω. Unser gemessener Wert trifft also im Rahmen der Messungenauigkeiten zu.

2.2 Bestimmung des Innenwiderstandes über Brückendiagonale

Durch Messung des Galvanometerausschlages in Abhängigkeit vom Vorwiderstand in Schaltung 3 bei offener und bei geschlossener Brücke, sollte der Innenwiderstand des Galvanometers bestimmt werden. Dieser ergibt sich wie in der Vorbereitung erläutert aus dem Schnittpunkt der beiden Regressionsgeraden die durch Auftragung von α^{-1} gegen R erhalten wurden. Die Regressionen wurden wieder mit gnuplot ausgeführt:



offene Brücke ($1/\alpha = A + B \cdot R$):
$A = (634{,}826 \pm 2{,}151) mm^{-1}$
$B = (5{,}70001 \pm 0{,}0739) mm^{-1}\Omega^{-1}$
geschlossene Brücke ($1/\alpha = C + D \cdot R$):
$C = (789{,}35 \pm 5{,}509) mm^{-1}$
$D = (-0{,}0192835 \pm 0{,}1924) mm^{-1}\Omega^{-1}$
Den Schnittpunkt der beiden Geraden erhält man aus:

$$R = \frac{A - C}{D - B} = 27{,}02\Omega$$

Wie in der Vorbereitung beschrieben kann man aus dem Schnittpunkt den Innenwiderstand des Galvanometers berechnen:

$$R_G = \frac{R_{12}}{R_{13}} \cdot R$$

Um den Wert von R_G auszurechen ist diese Unterscheidung zwischen Innenwiderstand und dem Schnittpunkt nicht nötigt, da $R_{12} = R_{13}$. Um jedoch den systematischen Fehler von R_G zu betrachten, muss man dies beachten:

$$\Delta R_G^{sys} = \left(\frac{\Delta R_{12}^{sys}}{R_{12}} + \frac{\Delta R_{13}^{sys}}{R_{13}} \right) \cdot R_G = 0{,}81\Omega$$

Der statistische Fehler ergibt sich zu:

$$\sigma_{R_G}^{stat} = \sqrt{\left(\frac{1}{D - B} \right)^2 \cdot (\sigma_A^2 + \sigma_C^2) + \left(\frac{A - C}{(D - B)^2} \right)^2 \cdot (\sigma_B^2 + \sigma_D^2)} = 1{,}4\Omega$$

Daraus folgt:

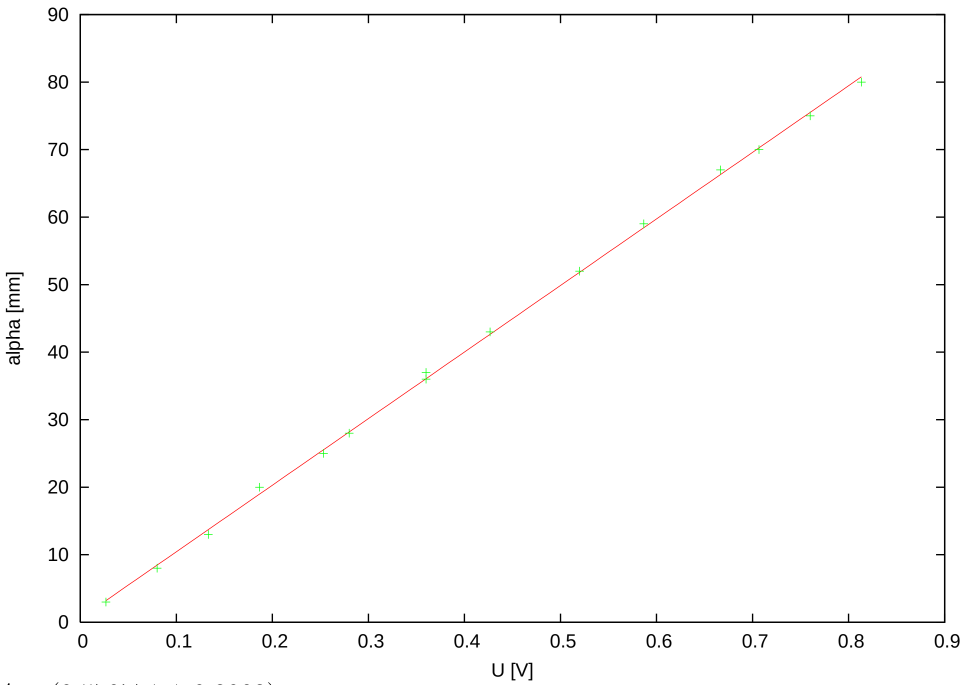
$$R_G = (27{,}0 \pm 1{,}4 \pm 0{,}8)\Omega$$

Dieser Wert ist gut vereinbar mit unserem Wert aus 2.1 und auch mit dem tatsächlichen Wert des Innenwiderstandes. Problematisch war es bei der Durchführung des Versuches jedoch die Spannung tatsächlich konstant zu halten, da die Spannung zwischendurch immer wieder absackte (z.B. bei leichten Berührungen oder Erschütterungen der Batterie). Diese Fehlerquelle lässt sich aber rechnerisch nicht erfassen. Wir haben aber darauf geachtet die Spannung immer zu gut wie möglich nach zu justieren.

2.3 Stromempfindlichkeit C_I

Laut Aufgabenstellung soll in Schaltung 4 bei $R_a = \infty$ der Ausschlag in Abhängigkeit von der Spannung gemessen werden. Aus der Spannung soll dann die Stromstärke berechnet werden und diese ist gegen den Ausschlag aufzutragen. Da aber durch das Umrechnen von Spannung in Stromstärke ($I = U/R_{15}$), die Stromstärke einen systematischen Fehler hat, den man bei einer linearen Regression komplett vernachlässigt, haben wir beschlossen direkt U gegen α aufzutragen. Die Steigung B der Regressionsgerade entspricht dann C_I/R_{15}.

Die Regression wurde mit gnuplot durchgeführt ($\alpha = A + B \cdot U$):



$A = (0{,}570771 \pm 0{,}3082) mm$
$B = (98{,}6101 \pm 0{,}6435) mm V^{-1}$
C_I berechnet sich also zu:

$$C_I = R_{15} \cdot B = 49{,}9 \cdot 10^3 \frac{m}{A}$$

$$\Delta C_I^{sys} = C_I \frac{\Delta R_{15}^{sys}}{R_{15}} = 0{,}75$$

$$\sigma_{C_I}^{stat} = C_I \frac{\sigma_B}{B} = 0{,}3$$

Damit ergibt sich für die Stromempfindlichkeit:

$$C_I = (49{,}9 \pm 0{,}3 \pm 0{,}8) \cdot 10^3 \frac{m}{A}$$

3 Bestimmen der Galvanometer-Kenngrößen

Wir messen mehrere Schwingungen in Schaltung 4. Allerdings wird nun nicht mehr der statische Fall, sondern das Zurückschwingen zum Nullpunkt untersucht. Deshalb erfolgt die

Messreihe diesmal nicht in Abhängigkeit der Spannung, sondern in Abhängigkeit zum Außenwiderstand R_a. Wir betrachteten Widerstandswerte von $R_a = 1\,\mathrm{k}\Omega$ bis $R_a = \infty$. Zuerst ließen wir das Galvanometer bei angelegter Spannung zur Ruhe kommen. Dies ließ sich zur Betätigung des Tasters T beschleunigen[3]. In die Verbindung zur Stromquelle bauten wir einen Taster aus Schaltung 5 ein. Beim Loslassen dieses Tasters wurde der Stromfluss unterbrochen und das Galvanometer fing an, um die Nulllage herum zu schwingen. Wir maßen die Ausschläge α und die Periodendauer T.

Zur Bestimmung des Dämpfungsverhältnises gilt (wie in der Vorbereitung)

$$k = \left(\frac{\alpha_{i-n}}{\alpha_i}\right)^{\frac{1}{n}} \qquad \text{oder mit } i = 0\text{:} \qquad k = \left(\frac{\alpha_0}{\alpha_n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

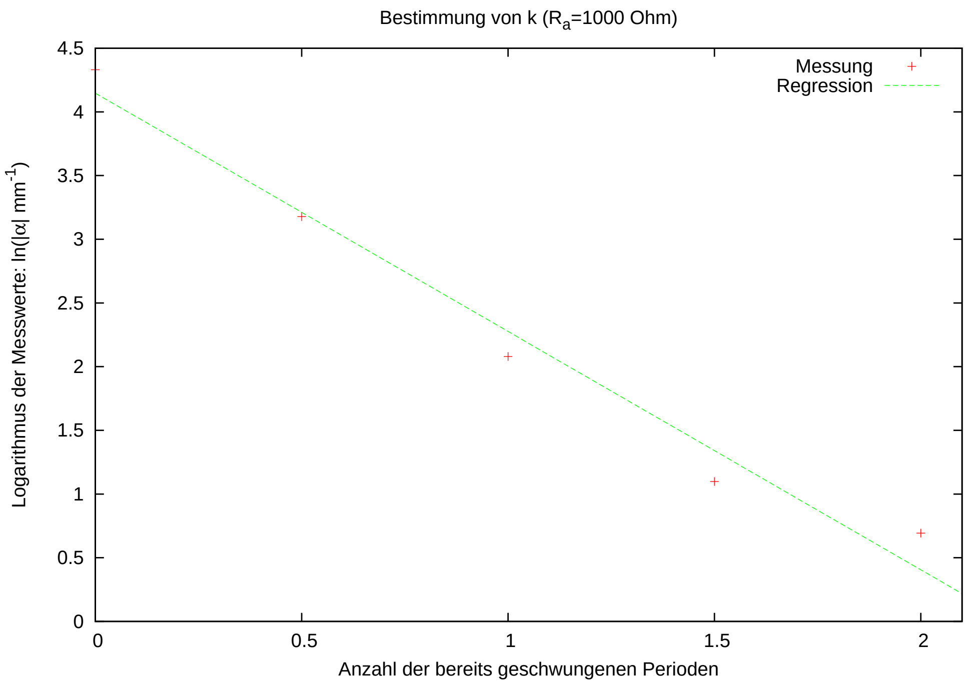
Umformen führt zu (mit $\alpha_s = 1\,\mathrm{mm}$ zur Normierung der Logarithmen):

$$\ln\left(\frac{\alpha_n}{\alpha_s}\right) = \underbrace{-\ln(k)}_{B} \cdot n + \underbrace{\ln\left(\frac{\alpha_0}{\alpha_s}\right)}_{A}$$

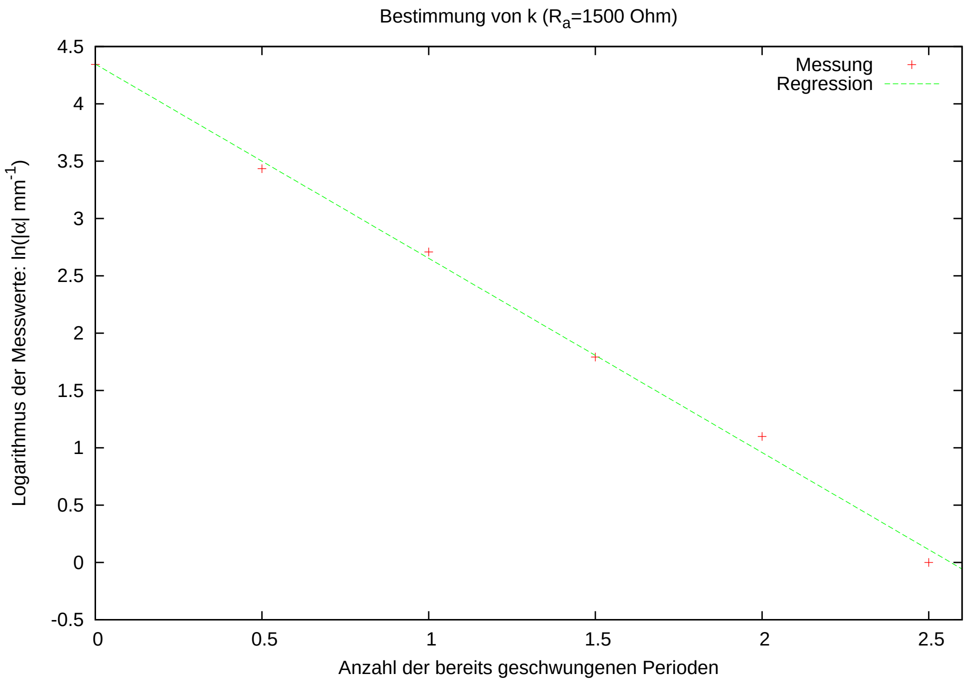
Wir führen eine lineare Regression ($A + B \cdot n$) durch, indem wir $\ln\left(\frac{\alpha_n}{\alpha_s}\right)$ über der Periodenanzahl n auftragen und erhalten damit:

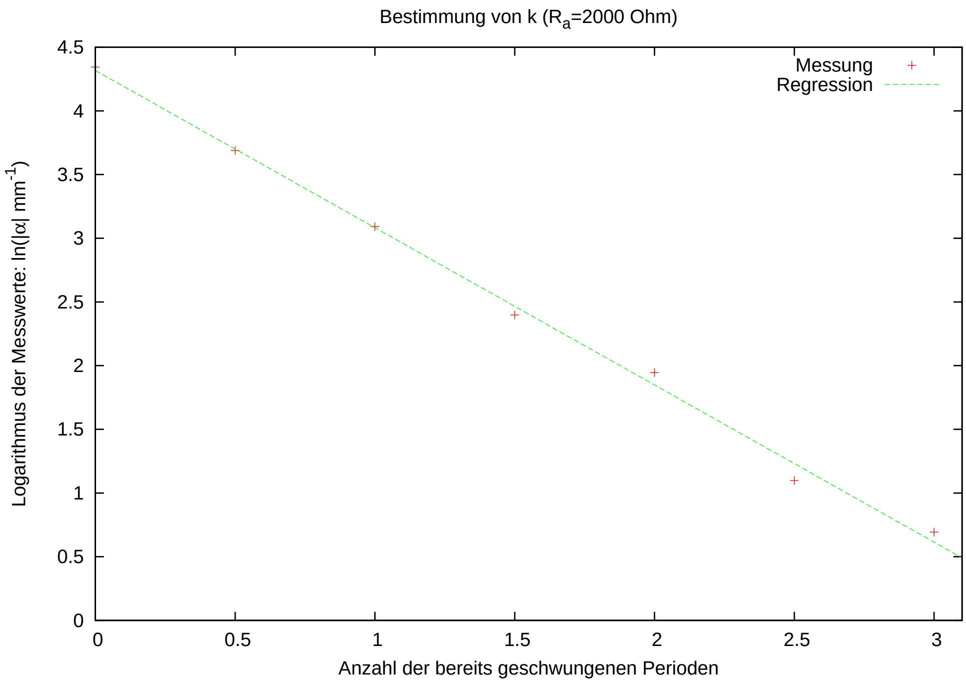
$$k = e^{-B}$$

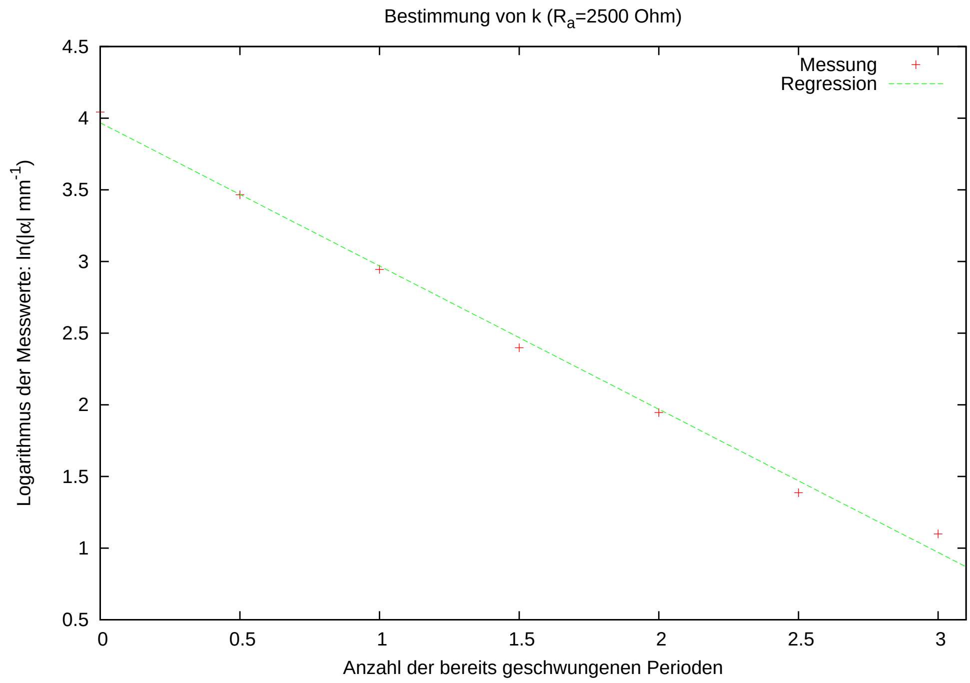
Die folgende Schaubilder zeigen die Graphen der Regression und die jeweiligen Messwerte. Die entsprechenden Werte für A und B sind danach in einer Tabelle zusammen gefasst.

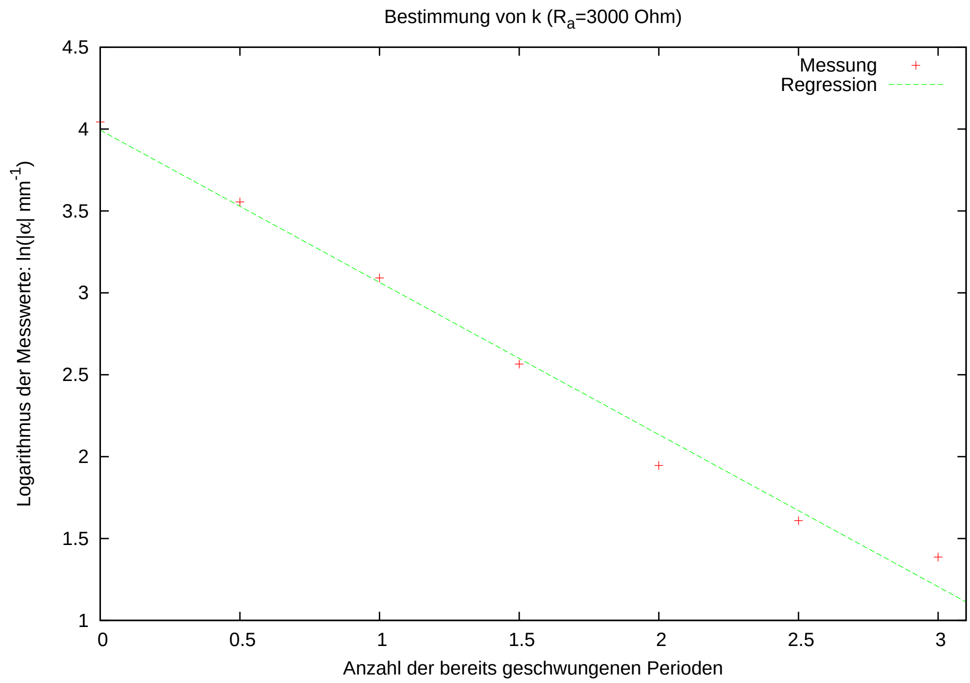


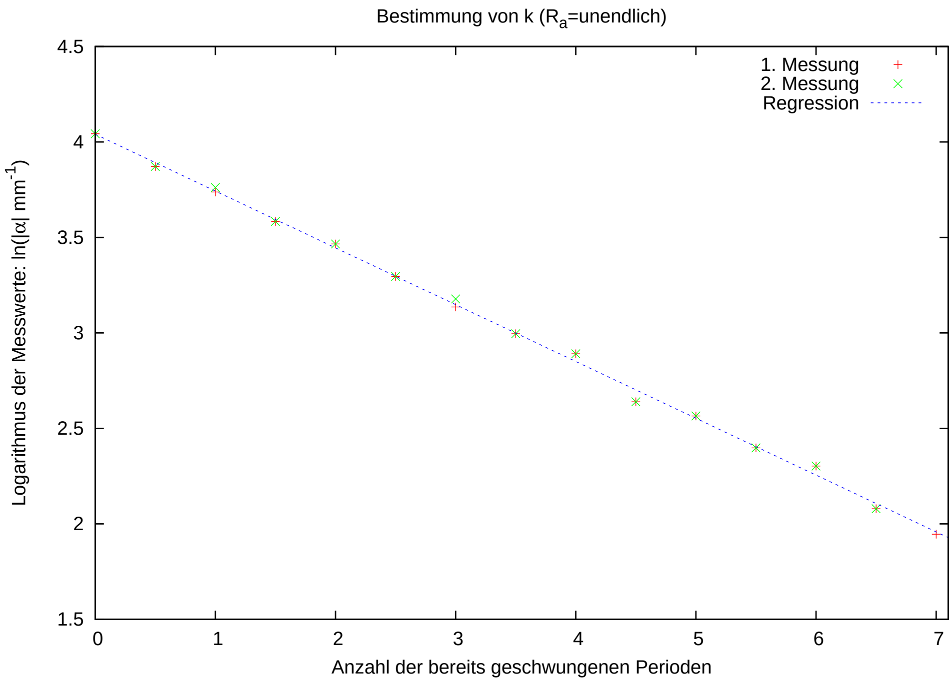
[3] Vgl. Frage 2 in der Vorbereitung


Bestimmung von k (R_a=1500 Ohm)
Messung
Regression
Logarithmus der Messwerte: ln(|α| mm^{-1})
Anzahl der bereits geschwungenen Perioden
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5


Bestimmung von k (R_a=2000 Ohm)
Messung
Regression
Logarithmus der Messwerte: ln(|α| mm^{-1})
Anzahl der bereits geschwungenen Perioden
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3


Bestimmung von k (R_a=2500 Ohm)
Messung
Regression
Logarithmus der Messwerte: ln(|α| mm^-1)
Anzahl der bereits geschwungenen Perioden
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3


Bestimmung von k (R_a=3000 Ohm)
Messung
Regression
Logarithmus der Messwerte: ln(|α| mm^-1)
Anzahl der bereits geschwungenen Perioden
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3



Die Werte A,B,$\sigma_{A,stat}$ und $\sigma_{B,stat}$ entstammen der linearen Regression und daraus lässt sich nach der obigen Formel k berechnen. $\sigma_{k,stat}$ erhält man durch Benutzung der Gaußschen Fehlerfortpflanzung[4]:

$$\sigma_{k,stat} = \sqrt{\left(\frac{\partial k}{\partial B}\right)^2 \cdot \sigma^2_{B,stat}} = -B \cdot k \cdot \sigma_{B,stat}$$

R_a in Ω	A	B	$\sigma_{A,stat}$	$\sigma_{B,stat}$	$k = e^{-B}$	$\sigma_{k,stat} = -B \cdot k \cdot \sigma_{B,stat}$
1026	4,15	$-1{,}87$	0,21	0,17	6,5	2,1
1484	4,347	$-1{,}694$	0,072	0,048	5,44	0,44
1986	4,317	$-1{,}234$	0,060	0,033	3,44	0,14
2500	3,968	$-0{,}999$	0,057	0,032	2,716	0,086
3010	3,993	$-0{,}929$	0,085	0,047	2,53	0,11
∞	4,040	$-0{,}2975$	0,010	0,0025	1,34646	0,00099

T_{ges} ist die gemessene Gesamtschwingdauer. Teilt man diese durch die Anzahl n der Perioden erhält man die Periodendauer T. Da wir (außer für T_∞) die Periodendauer nur einmal gemessen haben, können wir leider keinen statistischen Fehler für T angeben. Für β gilt:

$$\beta = \frac{\ln(k)}{T} = \frac{\ln(e^{-B})}{T} = -\frac{B}{T}$$

R_a in Ω	T_{ges}	$\sigma_{T_{\text{ges}},sys}$	n	T	$\sigma_{T,sys}$	$\beta = -\frac{B}{T}$	$\sigma_{\beta,stat}$	$\sigma_{\beta,sys}$
1026	8,25 s	0,5[5] s	2	4,13 s	0,25 s	0,454s^{-1}	0,041s^{-1}	0,027s^{-1}
1484	10,15 s	0,5 s	2,5	4,06 s	0,20 s	0,417s^{-1}	0,012s^{-1}	0,021s^{-1}
1986	12,69 s	0,5 s	3	4,23 s	0,17 s	0,2918s^{-1}	0,0079s^{-1}	0,011s^{-1}
2500	16,59 s	0,5 s	4	4,15 s	0,13 s	0,2409s^{-1}	0,0077s^{-1}	0,0073s^{-1}
3010	16,45 s	0,5 s	4	4,11 s	0,13 s	0,226s^{-1}	0,011s^{-1}	0,0069s^{-1}
∞	-	-	-	4,145 s	0,057 s	0,07240s^{-1}	0,0018s^{-1}	0,0013s^{-1}

[4]siehe Fehlerrechnungsskript Formel 4

Für T_∞ ergibt sich als Mittelwerte aus den beiden Messungen ein statistischer Fehler. Dieser wurde für die Berechnung von $\sigma_{\beta,stat}$ berücksichtigt.

$$T_1 = 4{,}1986\,\mathrm{s} \qquad T_2 = 4{,}0922\,\mathrm{s} \qquad T_\infty = 4{,}1454\,\mathrm{s}$$

$$\sigma_{T_1,sys} = 0{,}0714\,\mathrm{s} \qquad \sigma_{T_2,sys} = 0{,}0435\,\mathrm{s} \qquad \sigma_{T,sys} = 0{,}05745\,\mathrm{s}$$

$$\sigma_{T,stat} = t_n \cdot \frac{S_x}{\sqrt{n}} = 1{,}84 \cdot \frac{0{,}0752}{\sqrt{2}} = 0{,}0979\,\mathrm{s}$$

Der Korrekturfaktor t_n folgt aus der Studentverteilung. Vergleiche auch mit der Formel 10 im Fehlerrechnungsskript.

$$\text{Insgesamt:} \qquad \Rightarrow \quad T_\infty = 4{,}145 \pm 0{,}098 \pm 0{,}057\,\mathrm{s}$$

Man sieht, dass die Dämpfungswerte β mit steigendem Außenwiderstand wie in der Theorie erwartet immer kleiner werden. Die theoretisch erwartete Abhängigkeit der Periodendauer[6] T lässt sich nicht feststellen, da die Messwerte zu ungenau sind.

Die Frequenz des ungedämpften Galvanometers lässt sich aus der Periodendauer T_∞ und des Dämpfungskoeffizienten β_∞ berechnen. Der Index ∞ bezeichnet den nicht angeschlossenen Außenwiderstand:

$$\omega_0 = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{T_\infty}\right)^2 + \beta_\infty^2} = 1{,}517\frac{1}{\mathrm{s}}$$

$$\sigma_{\omega_0,stat} = \sqrt{\left(\frac{\partial\omega_0}{\partial\beta_\infty}\right)^2 \cdot \sigma^2_{\beta_\infty,stat} + \left(\frac{\partial\omega_0}{\partial T_\infty}\right)^2 \cdot \sigma^2_{T_\infty,stat}}$$

$$\sigma_{\omega_0,stat} = \sqrt{\left(\frac{\beta_\infty}{\omega_0} \cdot \sigma_{\beta_\infty,stat}\right)^2 + \left(\frac{\frac{(2\pi)^2}{T_\infty^3}}{\omega_0} \cdot \sigma_{T_\infty,stat}\right)^2} = 0{,}0358\frac{1}{\mathrm{s}}$$

$$\sigma_{\omega_0,sys} = \left|\frac{\partial\omega_0}{\partial\beta_\infty}\right| \cdot \sigma_{\beta_\infty,sys} + \left|\frac{\partial\omega_0}{\partial T_\infty}\right| \cdot \sigma_{T_\infty,sys}$$

$$\sigma_{\omega_0,sys} = \frac{\beta_\infty}{\omega_0} \cdot \sigma_{\beta_\infty,sys} + \frac{\frac{(2\pi)^2}{T_\infty^3}}{\omega_0} \cdot \sigma_{T_\infty,sys} = 0{,}0209\frac{1}{\mathrm{s}}$$

Alles zusammen ergibt:

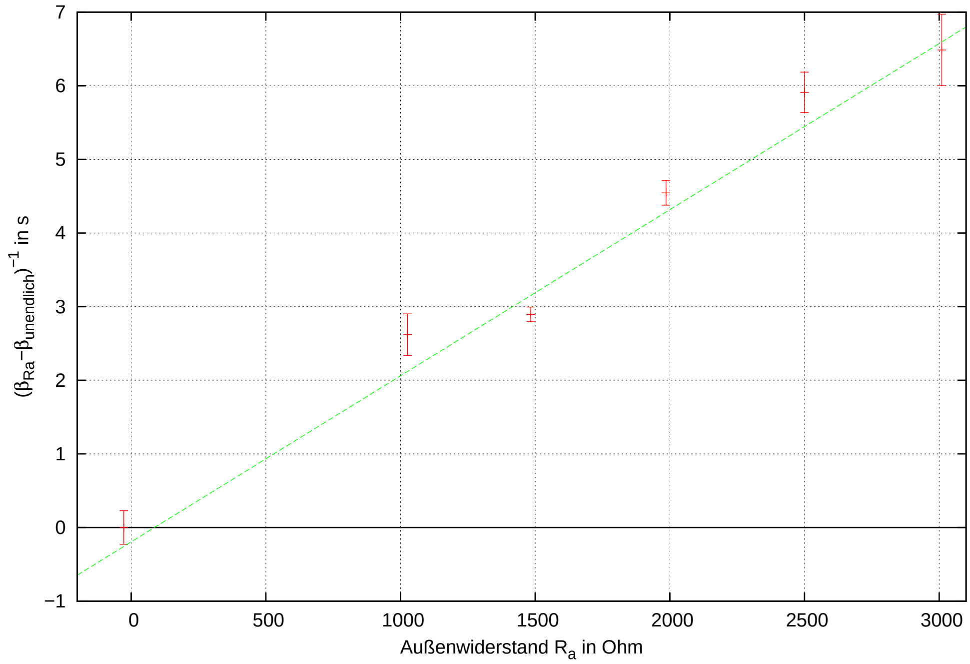
$$\omega_0 = 1{,}517 \pm 0{,}036 \pm 0{,}021\frac{1}{\mathrm{s}}$$

Wir erstellen für die folgenden β-Differenzen eine gewichtete Regression. Für den theoretischen Zusatzmesswert ($0\,\mathrm{s}, R_G = 27\,\Omega$) bietet es sich an, als Standardabweichung das geometrische Mittel der gemessenen Standardabweichungen zu benutzen. Dies ergibt $\sigma_{sys} = 0{,}23\,\mathrm{s}$. In die Regression wurden nur die statistischen Fehler eingetragen.

R_a in Ω	$(\beta_{Ra} - \beta_\infty)^{-1}$ in s	$\sigma_{(\beta_{Ra}-\beta_\infty)^{-1},stat}$ in s	$\sigma_{(\beta_{Ra}-\beta_\infty)^{-1},sys}$ in s
1026	2,62	0,28	0,20
1484	2,89	0,10	0,18
1986	4,55	0,17	0,26
2500	5,91	0,27	0,29
3010	6,49	0,49	0,33

[5] Dies ist eine Schätzung. Wir gehen von diesem doch recht geringen Fehler im Vergleich zur menschlichen Reaktionszeit (ca. 1s) aus, da man durch Mitverfolgen der Messung die Zeit recht genaue Messen kann.

[6] Die Periodendauer sollte wegen $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ mit steigender Dämpfung ansteigen.



Für diese Regression[7] ($f(x) = A + B \cdot x$) ergeben sich die folgenden Werte für A und B:

$$A = -0{,}20\,\mathrm{s} \qquad \sigma_{A,stat} = 0{,}37\,\mathrm{s}$$

$$B = 0{,}00226\frac{\mathrm{s}}{\Omega} \qquad \sigma_{B,stat} = 0{,}00023\frac{\mathrm{s}}{\Omega}$$

Der Fehler für den Y-Achsenabschnitt ist recht groß (knapp 200%). Der lineare Zusammenhang konnte leider nicht genau genug gemessen werden.

Für den Außenwiderstand $R_{a,gr}$ beim aperiodischen Grenzfall ($\omega_0 = \beta_{Ra}$) gilt dann:

$$(\omega_0 - \beta_\infty)^{-1} = B \cdot R_{a,g} + A$$

$$\Rightarrow R_{a,gr} = \frac{(\omega_0 - \beta_\infty)^{-1} - A}{B} = 395\,\Omega$$

Den statistischen Fehler erhalten wir über:

$$\sigma_{R_{a,gr},stat} = \sqrt{\left(\frac{\partial R_{a,gr}}{\partial \omega_0}\right)^2 \sigma^2_{\omega_0,stat} + \left(\frac{\partial R_{a,gr}}{\partial \beta_\infty}\right)^2 \sigma^2_{\beta_\infty,stat} + \left(\frac{\partial R_{a,gr}}{\partial A}\right)^2 \sigma^2_{A,stat} + \left(\frac{\partial R_{a,gr}}{\partial B}\right)^2 \sigma^2_{B,stat}}$$

$$\sigma_{R_{a,gr},stat} = 168{,}7\,\Omega$$

Der systematische Fehler ergibt sich zu:

$$\sigma_{R_{a,gr},sys} = \left|\frac{\partial R_{a,gr}}{\partial \omega_0}\right| \sigma_{\omega_0,sys} + \left|\frac{\partial R_{a,gr}}{\partial \beta_\infty}\right| \sigma_{\beta_\infty,sys} = 4{,}7\,\Omega$$

Alles zusammen lautet das Ergebnis:

$$R_{a,gr} = 395 \pm 169 \pm 5\,\Omega$$

[7] für die Theorie: siehe Vorbereitung

Der Wert für $R_{a,gr}$ liegt in der gleichen Größenordnung wie der Wert des Widerstands $R16$, den man zur Dämpfung in Schaltung 4 parallel zum Galvanometer schalten kann. Da wir dabei einen Fall nahe des Grenzfalles beobachtet hatten, bestätigt dies unser Ergebnis. Allerdings ist das Ergebnis so ungenau, dass der Grenzwiderstand genauso bei $500\,\Omega$ oder $250\,\Omega$ liegen könnte. Das Messverfahren ist nur geeignet, um die *Größenordnung* des Widerstandes festzulegen. Zur genauen Bestimmung des Grenzwiderstandes ist die Messmethode ungeeignet.

Nun wollen wir die Galvanometerkonstanten berechnen. Dazu benutzen wir die Formel aus der Vorbereitung:

$$G = \frac{2}{\omega_0^2 \cdot C_I' \cdot B} \qquad \Theta = \frac{2}{\omega_0^4 \cdot C_I'^2 \cdot B} \qquad D = \frac{2}{\omega_0^2 \cdot C_I'^2 \cdot B}$$

Für die Stromempfindlichkeit C_I benutzen wir den berechneten Wert aus Aufgabe 2.3[8]. Außerdem müssen wir noch über den Spiegel-Skalenabstand $r = 250 \pm 3\,\text{mm}$ die richtige Dimension für C_I berechnen.

$$C_I = (49{,}9 \pm 0{,}3 \pm 0{,}8) \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{A}} \qquad C_I' = \frac{C_I}{2 \cdot r} = 9{,}98 \cdot 10^4 \frac{\text{rad}}{\text{A}}$$

$$\sigma_{C_I',stat} = 0{,}06 \cdot 10^4 \frac{\text{rad}}{\text{A}} \qquad \sigma_{C_I',sys} = 0{,}28 \cdot 10^4 \frac{\text{rad}}{\text{A}}$$

Die Fehler erhalten wir ganz einfach. Wir müssen nur die relativen Fehler gewichtet mit den jeweiligen Exponenten addieren[9]:

$$\sigma_{\Theta,stat} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\omega_0,stat}}{\omega_0} \cdot \underbrace{4}_{\text{Exponent}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{C_I',stat}}{C_I'} \cdot 2\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{B,stat}}{B}\right)^2} \cdot \Theta = 0{,}23 \cdot 10^{-8}\,\text{kg}\,\text{m}^2$$

Für die anderen Werte ergibt sich der Fehler analog. Man berechnet:

$$\text{Galvanometerkonstante:} \quad G = (3{,}85 \pm 0{,}43 \pm 0{,}21) \cdot 10^{-3}\,\text{Tm}^2$$

$$\text{Trägheitsmoment:} \quad \Theta = (1{,}68 \pm 0{,}23 \pm 0{,}19) \cdot 10^{-8}\,\text{kg}\,\text{m}^2$$

$$\text{Rückstellmoment}^{10}\text{:} \quad D = (3{,}86 \pm 0{,}44 \pm 0{,}32) \cdot 10^{-8} \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Sowohl das Trägheitsmoment Θ, wie auch das Rückstellmoment D sind relativ klein. Allerdings ist das Galvanometer ja auch hochempfindlich, sodass diese Werte durchaus sinnvoll erscheinen.

4 Stromstöße

4.1 Messung

Es wurde die Stromstoßempfindlichkeit für kurze Stromstoßdauern in Schaltung 5 gemessen. Um eine kurze Stromstoßdauer zu erzielen muss der Drehwiderstand R_{17} klein sein. Wir wählten $R_{17} = 8k\Omega$ und hielten die Spannung konstant auf $U = 197{,}3mV$. Die Stromstoßempfindlichkeit C_b lässt sich aus folgender Formel berechnen:

$$C_b = \frac{\alpha_{max}}{2r} \cdot \frac{1 + \frac{R_G}{R_a}}{CU}$$

[8] Wir trafen diese Wahl, da der Werte eine kleinere Messunsicherheit aufweist als der Wert aus Aufgabe 2.1

[9] Beim statistischen Fehler rechnet man quadratisch; beim systematischen linear

[10] Eigentlich der Wert der Federkonstanten, die zum zurückstellen gedacht ist.

Den systematischen Fehler erhält man aus:

$$\Delta C_b^{sys} = C_b \cdot \left(\frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta C}{C} + \frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta \alpha_{max}}{\alpha_{max}} \right) + \frac{\alpha_{max} R_G}{2rCUR_a} \left(\frac{\Delta R_G}{R_G} + \frac{\Delta R_a}{R_a} \right)$$

Für den Ausschlag haben wir einen Ablesefehler von $\Delta\alpha_{max} = 1mm$ angenommen. Alle anderen Fehler sind im Aufgabenblatt angegeben.
Den statistischen Fehler berechnet man aus:

$$\sigma_{C_b}^{stat} = \sqrt{\left(C_b \cdot \frac{\sigma_{\alpha_{max}}}{\alpha_{max}} \right)^2 + \left(\frac{\alpha_{max}}{2rCUR_a} \sigma_{R_G} \right)^2}$$

So ergibt sich für die verschiedenen Widerstände R_a:

- $R_a = \infty$: $\alpha_{max} = 77mm \pm 0{,}58mm$

$$C_b = (189400 \pm 1400 \pm 17000) \frac{rad}{C}$$

- $R_a = 1000\Omega$: $\alpha_{max} = 51{,}3mm \pm 0{,}67mm$

$$C_b = (129600 \pm 1700 \pm 12700) \frac{rad}{C}$$

- $R_a = 330\Omega$: $\alpha_{max} = 30{,}7mm \pm 0{,}33mm$

$$C_b = (81700 \pm 900 \pm 9300) \frac{rad}{C}$$

- $R_a = 33\Omega$: $\alpha_{max} = 3mm \pm 0mm$

$$C_b = (13000 \pm 0 \pm 6000) \frac{rad}{C}$$

4.2 Berechnung über theoretische Formel

Diese experimentell bestimmten Werte sollen nun mit den aus den theoretischen Formeln (siehe Vorbereitung) erhaltenen Werten verglichen werden. Die in den Formeln vorkommenden Kenngrößen wurden in den vorherigen Experimenten bestimmt.

- Schwingfall:

$$C_b = \frac{G}{\Theta\omega_0} = (151000 \pm 27000 \pm 27000) \frac{rad}{C}$$

$$\Delta C_b^{sys} = C_b \cdot \left(\frac{\Delta G}{G} + \frac{\Delta\Theta}{\Theta} + \frac{\Delta\omega_0}{\omega_0} \right)$$

$$\sigma_{C_b}^{stat} = C_b \cdot \left(\left(\frac{\sigma_G}{G} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_\Theta}{\Theta} \right) + \left(\frac{\sigma_{\omega_0}}{\omega_0} \right) \right)^{1/2}$$

  Dies liegt in einer ähnlichen Größen Ordnung wie die experimentell ermittelten Werte für $R_a = \infty$ und $R_a = 1000\Omega$.

- Grenzfall:

$$C_b = \frac{G}{\Theta\omega_0 e} = (55600 \pm 9900 \pm 10090) \frac{rad}{C}$$

  Der systematische und der statistische Fehler berechnet sich genauso wie im Schwingfall (siehe oben). Auch dieser Wert liegt ungefähr in derselben Größenordnung wie der experimentelle (für $R_a = 330\Omega$).

- Kriechfall:

$$C_b = \frac{R_G + R_a}{G} = (15600 \pm 6700 \pm 1200)\frac{rad}{C}$$

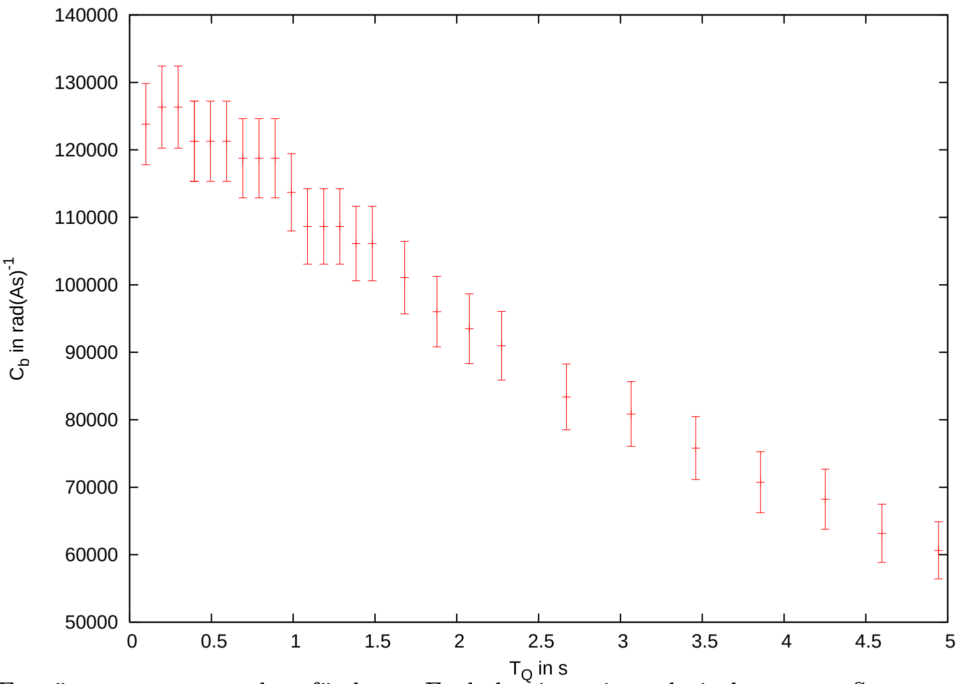
$$\Delta C_b^{sys} = \frac{\Delta R_G}{G} + \frac{\Delta R_a}{G} + \frac{(R_G + R_a) \cdot \Delta G}{G^2}$$

$$\sigma_{C_b}^{stat} = \left(\left(\frac{\Delta R_G}{G}\right)^2 + \left(\frac{\Delta R_a}{G}\right)^2 + \left(\frac{(R_G + R_a) \cdot \Delta G}{G^2}\right) \right)^{1/2}$$

Auch dieser Wert liegt wieder in der Nähe des experimentellen Wertes (für $R_a = 33\Omega$).

4.3 Abhängigkeit zur T_Q

Um zu zeigen, dass die Stromstoßempfindlichkeit nur für $T_Q << T$ nahezu unabhängig von T_Q ist. Haben wir den Ausschlag in Abhängigkeit von R_{17} bei konstanten $R_a = 1000\Omega$ und konstanter Spannung $U = 197{,}3mV$ gemessen. Aus diesen Messwerten kann man $T_Q = 3RC$ und C_b berechnen. Trägt man T_Q gegen C_b auf so erhält man folgendes Schaubild:



Es wäre zu erwarten, dass für kurze Entladezeiten eine relativ konstante Stromempfindlichkeit vorliegt, der Graph also ein Plateau bildet. Um zu zeigen, dass unsere Messwerte diese Forderung innerhalb der Messgenauigkeit erfüllen, haben wir zusätzlich die Fehlerbalken eingezeichnet[11]. Dadurch ist zu erkennen, dass die Stromempfindlichkeit bis ca $T_Q = 0{,}8s$ nur einen geringen Abfall aufweist. Danach fallen die Werte deutlich schneller.

5 Bemerkung zur Fehlerrechnung

Wir haben nur die Fehler beachtet, die offensichtlich bekannt waren. Es wurden keine Schätzwerte für externe Störung, wie z.B. Tisch- oder Gebäudeschwingungen, aufgestellt. Ebenso

[11] der Fehler wurde berechnet wie in 4.1

wurde diverse Vereinfachungen getroffen, wie beispielsweise, dass die Kabel und Steckverbindungen widerstandlos sind[12]. Auch die möglichen Fehler aufgrund der Spannungsschwankungen, die speziell bei Aufgabe 2 zu Problemen führen (vgl. Messprotokoll), wurden nicht weiter beachtet. Die systematischen Fehler der Werte, die wir aus den Regressionsgeraden erhielten[13], wurden (nach Absprache mit unserem Betreuer) vernachlässigt. Trotzdem sollten die Fehler gute Indikatoren zum Abschätzen der Qualität der Messwerte darstellen, da viele dieser Fehler (wie z.B. die Tischschwingungen) in den statistischen Fehler mit eingegangen sind.

[12] was näherungsweise auch stimmt und nur einen sehr kleinen Fehler darstellt

[13] also Steigung und Y-Achsenabschnitt