Versuchsvorbereitung P1-12: Schwingungen, Resonazverhalten

Kathrin Ender
Gruppe 10

25. November 2007

Inhaltsverzeichnis

In diesem Versuch werden mit Hilfe des Messsystems CASSY freie und erzwungene Schwingungen von mechanischer und elektrischer Art untersucht. Es werden das Resonanzverhalten bezügliche der Amplitude und der Phase, sowie Güte und Dämpfung untersucht.

0 Theoretische Grundlagen

Bei den ersten vier Aufgaben wird ein Pohlsches Rad verwendet. Das Pohlsche Rad ist ein Drehpendel. Es besteht aus einem Kupferring mit Speichen, der an der Mittelachse frei drehbar gelagert ist. Um eine Rückstellkraft zu erhalten, wenn das Rad um einen Winkel φ ausgelenkt wird, ist eine Feder am Ring angebracht. Das Pohlsche Rad führt also eine harmonische Schwingung aus. Es kann mittles einer Wirbelstrombremse gedämpft werden oder über einen Motor extern angetrieben werden, so dass es eine erzwungene Schwingung durchführt.

Schwingungsgleichung

Für das Pohlsche Rad gilt folgende Schwingunsdgl:

$$\Theta\ddot{\varphi} + \gamma\dot{\varphi} + D^*\varphi = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0 \qquad \text{mit} \quad \beta = \frac{\gamma}{2\Theta} \quad \text{und} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{D^*}{\Theta}}$$

Θ ist dabei das Trägheitmoment, D^* die Rückstellkonstante, γ hängt von der Stärke der Dämpfung ab, β ist die Dämfungskonstante und ω_0 ist die Eigenfrequenz.
Mit dem Ansatz $\varphi(t) = c \cdot \exp(\lambda t)$ erhält man die Lösung:

$$\lambda_{1/2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

Es muss zwischen drei Fällen unterschieden werden:

- **Schwingfall, $\beta < \omega_0$:** Ist die Dämpfung nur schwach so führt das System eine gedämpfte Schwingung aus. Als Lösung ergibt sich:

  $$\varphi(t) = A \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos(wt + \psi) \qquad \text{mit} \quad w = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

  A und die Phasenverschiebung ψ lassen sich aus Randbedingungen bestimmen. Trägt man φ gegen t auf, so erhält man eine um psi verschobene Konsinusfunktion, deren Amplitude exponentiell abfällt. $e^{-\beta t}$ ist dabei die Einhüllende.

- **Kriechfall, $\beta > \omega_0$:** Ist die Dämpfung zu stark so führt das System keine Schwingung mehr aus. Die Schwingung klingt langsam ab (sie „kriecht“ gegen Null). Als Lösung ergibt sich:

  $$\varphi = A \cdot \cosh(\omega t + \psi) \qquad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

- **Grenzfall, $\beta = \omega_0$:** Bei der Grenzdämpfung strebt das System im Gegensatz zum Kriechfall schnell zur Nulllage zurück. Als Lösung reicht nicht nur die aus dem allgemeinen Ansatz erhaltene Lösung, da auch $\varphi = B \cdot t \cdot e^{-\beta t}$ die DGL erfüllt:

  $$\varphi(t) = A(1 + Bt) \cdot e^{-\beta t}$$

Der getriebene Oszillator und der elektrische Schwingkreis werden bei den entsprecheneden Aufgaben erklärt.

1 Drehpendel, freie Schwingung

Mit CASSY soll der zeitliche Velauf des Phasenwinkels, der Winkelgeschwindigkeit und der kinetische Energie beim Schwingvorgang des Pohlschen Rades (ohne Wirbelstrombremse) aufgenommen werden. Außerdem soll ein Phasenraumdiagramm erstellt werden (Winkelgeschwindigkeit über Winkel).Was CASSY tatsächlich misst ist die Auslenkung s des Pohlschen Rades. Über $\varphi = s/r$ lässt sich der Auslenkungswinkel berechnen. Die zeitliche Ableitung einer Messgröße kann CASSY automatische berechnen. Um die kinetische Energie zu berechen muss das Trägheitsmoment des Pohlschen Rades bekannt sein, da gilt:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\Theta \cdot \varphi^2$$

Das Pohlsche Rad kann als Holzylinder angenähert werden. Für das Trägheitsmoment gilt dann:

$$\Theta = \int_{r_i}^{r_a} r^2 dm \qquad \text{mit } dm = \varrho \cdot dV = \varrho \cdot 2\pi r d \cdot dr$$

$$\Theta = \int_{r_i}^{r_a} 2\pi\varrho r^3 d \cdot dr = \frac{\pi}{2}\varrho d(r_a^4 - r_i^4) = 1{,}4 \cdot 10^{-3} kg \cdot m^2$$

Die Abmessungen und die Dichte von Kupfer sind im Aufgabenblatt gegeben.
Obwohl bei diesem Versuch die Wirbelstrombremse nicht eingesetzt wird, ist eine geringe Dämpfung durch Reibung (z.B. des Rades an der Achse, oder Luftreibung) zu erwarten. Wie in den theoretischen Grundlagen hergeleitet muss die Amplitude also exponentiell abnehmen. Die Dämpfungskonstante β soll durch „Raten“ bestimmt werden.

2 Drehpendel, freie gedämpfte Schwingung

Nun soll für unterschiedliche Ströme $I_B = 100, 200, 400, 700mA$ durch die Wirbelstrombremse φ in Abhängigkeit von t gemessen werden. Die Dämpfungskonstante kann nun wieder über „Raten“ wie in Aufgabe 1 bestimmt werden. Man kann sie aber auch aus dem Dämpfungsverhältnis k bestimmen. Es gilt:

$$k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_{i-1}}{\varphi_i} = \sqrt[n]{\frac{\varphi_0}{\varphi_n}} \qquad \beta = \frac{\ln k}{T}$$

Der erste Ausdruck ist vermutlich geeignetere um k zu bestimmen, da hier mehr Messwerte eingehen, das heißt der statistische Fehler minimiert wird. Beim zweiten Ausruck stüzt sich die gesamte Berechnung nur auf zwei Messwerte.
Will man die tatsächlich durch die Wirbelstrombremse erzeugte Dämpfung betrachten, so muss der Wert für die Dämpfungskonstante noch korriegert werden, indem man die aus Aufgabe 1 bekannte Dämpfungskonstante ohne Wirbelstrombremse $\beta(0)$ abzieht.

$$\beta_{korr}(I_B) = \beta(I_B) - \beta(0)$$

β_{korr} hängt quadratisch vom Strom durch die Spule der Wirbelstrombremse ab, da die Dämpfung proportional zur an der Spule umgesetzten Leistung ist:

$$\beta_{korr}(I_B) \propto P_L = U \cdot I_B = R_L \cdot I_B^2 \Rightarrow \quad \beta_{korr} = const \cdot I_B^2$$

Durch graphische Auftragung von β_{korr} über I_B^2 kann nun die const. bestimmt werden. Dann kann man berechnen für welchen Stromfluss I_B der aperiodische Grenzfall ($\beta = \omega_0$) auftritt.

$$I_B^{Grenz} = \sqrt{\omega_0/const}$$

ω_0 kann aus der Periodendauer für den Fall ohne Wirbelstrombremse, welche aus dem Winkel-Zeit-Diagramm abzulesen ist, berechnet werden. I_B für den aperiodischen Grenzfall soll außerdem noch experimentell bestimmt werden. Das heißt man probiert aus für welche Stromstärke die Amplitude am schnellsten abklingt.
Außerdem soll noch die Güte berechnet werden. Der Gütefaktor hängt mit dem Energieverlust des Systems durch die Dämpfung zusammen:

$$Q = \frac{2\pi \cdot \text{Schwingungsenergie}}{\text{Energieverlust pro Periode}} = \frac{2\pi\varphi^2(t)}{\varphi^2(t) - \varphi^2(t+T)} = \frac{2\pi}{1-k^{-2}} = \frac{2\pi}{1-e^{-2\beta T}}$$

$$\text{für } \beta T << 1 \text{ gilt die Näherung:} \qquad Q \approx \frac{2\pi}{2\beta T_0} = \frac{\omega_0}{2\beta}$$

3 Statische Bestimmung der Winkelrichtgröße D^*

Die Winkelrichtgröße D^* der Feder des Drehpendels lässt sich bestimmen, indem man des Drehpendel mit einer bekannten Kraft, die tangential angreift auslenkt. Diese Kraft könnte z.B durch Ziehen mit einem Kraftmesser erzeugt werden, oder durch eine mit einem Faden befestigtes Gewicht, dessen Masse bekannt ist. Da sich das System im Gleichgewicht befindet, muss gelten, dass das durch die angreifende Kraft verursachte Drehmoment, dass sich aus dem Radius des Pohlschen Rades und der angreifenden Kraft berechnen lässt, gleich dem Rücktreibenden Moment der Feder sein muss:

$$F \cdot r = \varphi \cdot D^*$$

Da der in den theoretischen Grundlagen bereits erwähnte Zusammenhang $\Theta = D^*/\omega_0^2$ gilt. Lässt sich aus der Winkelrichtgröße das Trägheitsmoment berechnen. Setzt man nun noch ω_0 ein, so erhält man:

$$\Theta = \frac{D^* T^2(0)}{4\pi^2}$$

4 Drehpendel, erzwungene Schwingung

Die Resonanzkurve $\varphi(\Omega)$ soll für verschiedene Dämpfungskonstanten aufgenommen werden ($I_B = 200, 400mA$). Die Schwingungsgleichung für eine durch ein periodisches Drehmometn $M_0 \cdot \cos(\Omega t)$ erzwungene Schwingung lautet:

$$\ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = k\cos(\Omega t) \qquad \text{mit } k = \frac{M_0}{\Theta}$$

Da die homogene Lösung für das System bekannt ist muss nur noch eine spezielle bestimmt werden. Die endgültige Lösung erhält man durch Linearkombination der speziellen mit der homogenen Lösung. Da die homogene Lösung nach einer gewissen Einschwingzeit durch die Dämpfung bedingt nahezu verschwindet, reicht es nur die spezielle zu betrachten. Für diese kann der folgende Ansatz gewählt werden:

$$\varphi(t) = A \cdot \cos(\Omega t + \psi)$$

Durch Einsetzen in die Schwingungsdgl erhält man die Amplitude A und die Phasenverschiebung ψ:

$$A = \frac{k}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + \left(2\beta\Omega\right)^2}}$$

$$\psi = \arctan\left(-\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right)$$

Verlauf der Phasenverschiebung (für geringe Dämpfung):

- $\Omega << \omega_0$: Ist die Erregerfrequenz sehr viel kleiner als die Eigenfrequenz so ist die Phasenverschiebung $\psi \approx 0$
- $\Omega = \omega_0$: Ist die Erregerfrequenz gleich der Eigenfrequenz so liegt der Resonanzfall vor und die Phasenverschiebung ist $\psi = -\pi/2$
- $\Omega >> \omega_0$: Ist die Erregerfrequenz sehr viel größer als die Eigenfrequenz so ist die Phasenverschiebung $\psi \approx -\pi$

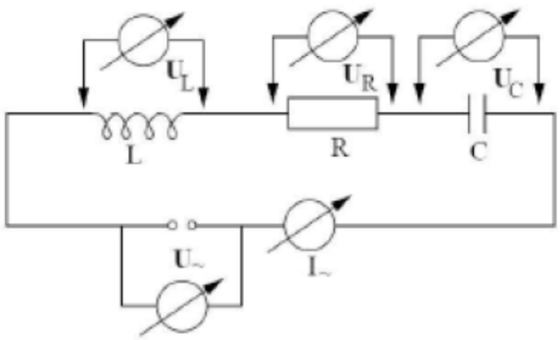
Die Amplitude hat nicht bei $\Omega = \omega_0$ ihr Maximum, sondern das die Resonazfrequenz wird durch ist durch die Dämpfung nach $\Omega_{res} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ verschoben. Das Amplitudenmaximum ist höher je geringer die Dämpfung ist. Bei der Resonanzfrequenz Ω_{res} hat die Amplitude den Wert:

$$A_{res} = \frac{k}{\omega_0^2} \cdot \frac{Q}{\sqrt{1 - 1/4 \cdot Q^2}} \qquad \text{mit dem Gütefaktor } Q = \frac{\omega_0}{2\beta}$$

Bei den Frequenzen $\Omega_{1,2} = \sqrt{1 \pm 1/Q} \cdot \omega_0$ hat die Amplitude ungefähr den Wert $A_{res}/2$ (für $Q^2 >> 1$). Der Abstand zwischen den Frequenzen Ω_1 und Ω_2 wird Bandbreite, $\Delta\omega$ genannt. Aus der Bandbreite lässt sich also schließlich mit einer weitern Näherung ($Q >> 1$) die Güte bestimmen.

$$\Delta\omega = \left(\sqrt{1 + \frac{1}{Q}} - \sqrt{1 - \frac{1}{Q}}\right) \cdot \omega_0 \approx \left(\left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{Q}\right) - \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{Q}\right)\right) \cdot \omega_0 = \frac{\omega_0}{Q}$$

5 Serienschwingkreis, erzwungene Schwingung



Beim seriellen Schwingkreis erhält man die Schwingungsdgl mit Hilfe der Kirchhoffschen Maschenregel:

$$U(t) = U_L(t) + U_R(t) + U_C(t) = L \cdot \frac{dI(t)}{dt} + R \cdot I(t) + \frac{\int I(t) \cdot dt}{C}$$

Durch Differenziern erhält man:

$$\frac{1}{L} \cdot U = \ddot{I} + \frac{R}{L}\dot{I} + \frac{1}{LC}I$$

Analog zur mechanischen Schwingungsgleichung kann nun die Dämpfungskonstante β und die Eigenfrequenz ω_0 des ungedämpften Systems bestimmt werden.

$$\beta = \frac{R}{2L} \qquad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

Für den gedämpften Fall ergibt sich die Eigenfrequenz:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

Auch beim Schwingkreis verschwindet nach der Einschwingzeit der homogene Teil der Lösung analog zur mechanischen DGL. Die Amplitude I_0 und die Phasenverschiebung ψ lassen sich also wieder aus der speziellen Lösung bestimmen.

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{U_0}{Z}$$

$$\psi = \arctan \frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R}$$

Aus der Breite der Resonanskurve lässt sich analog zum mechanischen Fall die Güte des Schwingkreises bestimmen:

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$$

Im Resonanzfall können die Spannungen, die an der Spule und am Kondensator abfallen den Wert von U_0 deutlich übersteigen. Aus dieser Spannungsüberhöhung kann ebenfalls die Güte bestimmt werden.

$$|U_L(\omega_0)| = |U_C(\omega_0)| = QU_0$$