Versuchsvorbereitung P1-11: Elastizität

Michael Walz
Gruppe 10

18. November 2007

Inhaltsverzeichnis

V Vorwort

In diesem Versuch soll das Verhalten von Festkörpern untersucht werden. Die beiden elastischen Konstanten Schubmodul G und Elastizitätsmodul E sollen bestimmt werden und ein Verständnis für die beiden elastischen Gesetze entwickelt werden.

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{E} \cdot \frac{F}{A} \qquad \alpha = \frac{1}{G} \cdot \frac{F}{A}$$

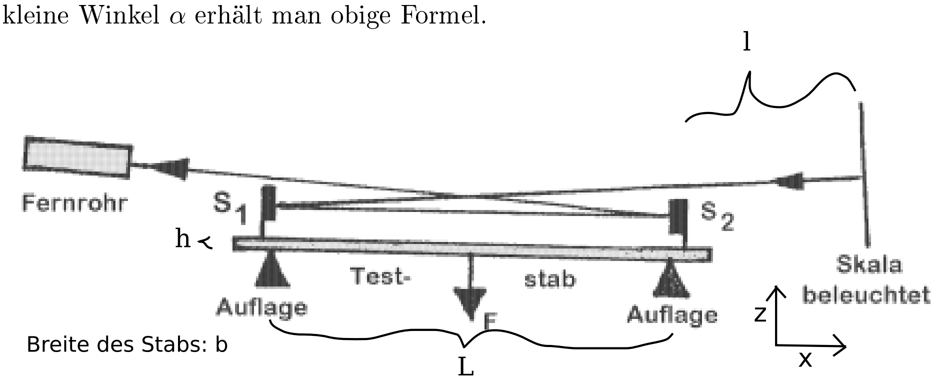
1 Elastizitätsmodul E (statischer Fall)

In diesem Versuch wird die zusätzliche Biegung des Balkens gemessen, die entsteht, wenn man durch ein Gewicht eine Kraft F auf die Mitte des Balkens wirken lässt. Daraus lässt sich der Elastizitätsmodul für die verschiedenen betrachteten Materialien berechnen.

Wenn sich beide Spiegel beide um den Winkel α nach innen neigen, dann ergibt dies eine Abweichung auf der Skala von:

$$\Delta s \approx 2 \cdot \alpha \cdot L + 4 \cdot \alpha \cdot (L + l)$$

Dies erhält man, wenn man den umgekehrten Lichtweg betrachtet. (Entweder praktisch mit einen Laser, der über die Spiegel auf die Skala strahlt oder rein theoretisch.) Wenn beide Winkel sich am den Winkel α ändern, so ist der Strahl, der bei S1 von S2 aus ankommt, um $2 \cdot \alpha$ gekippt. S1 verdoppelt diesen Winkel wieder, sodass die Änderung auf dem Schirm zu $\tan(4 \cdot \alpha) \cdot (L + l)$ ergibt. Ebenso wird der Lichtstrahl auf dem Schirm S1 durch die Reflexion an S2 schon nach unten um $\tan(2 \cdot \alpha) \cdot L$ verschoben. Mit der Näherung $\alpha = \tan(\alpha) = \sin(\alpha)$ für kleine Winkel α erhält man obige Formel.



Der Winkel α ist mit der wirkenden Kraft F über die folgenden Formel verknüpft.

$$\alpha = \frac{3 \cdot F \cdot L^2}{4 \cdot E \cdot b \cdot h^3}$$

Zur Herleitung: Es gilt das elastische Gesetz mit dem Elastizitätsmodul E:

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{E} \cdot \frac{F}{A}$$

Daraus folgt:

$$dF = \frac{\Delta L}{L} \cdot E \cdot dA$$

Wir legen ein Koordinatensystem so, dass die Neutrale Faser des Stabes (die Mittelachse wird weder gedeht noch gestaucht) auf der x-Achse verläuft. Die y-Achse nach hinten in die Zeichenebene. Die z-Achse zeige senkrecht nach oben. Damit gilt bei konstanter Breite b:

$$dA = b \cdot dz$$

Wenn wir nun nur kleine Schichten mit der Länge $L = dx$ betrachten, so ergibt sich für die Längenänderung

$$\Delta L = z \cdot \tan(d\alpha) = z \cdot d\alpha$$

Das Drehmoment, das durch die Kraft dF erzeugt wird, ist $dM = z \cdot dF$. Damit ergibt sich insgesamt:

$$M(x) = \int_{z=-h/2}^{z=+h/2} dM = \int_{z=-h/2}^{z=+h/2} z \cdot \frac{z \cdot d\alpha}{dx} \cdot E \cdot b \cdot dz = \left[\frac{z^3}{3} \cdot \frac{d\alpha}{dx} \cdot E \cdot b\right]_{z=-h/2}^{z=+h/2}$$

$$M(x) = \frac{h^3}{12} \cdot \frac{d\alpha}{dx} \cdot E \cdot b$$

Auflösen nach $d\alpha$ ergibt:

$$d\alpha = \frac{M(x) \cdot 12}{h^3 \cdot b \cdot E} \cdot dx$$

Wenn wir nun nur den halben Stab betrachten, auf den nur die halbe Kraft $F/2$ wirkt, so können wir die bisher allgemein hergeleiteten Formel benutzen und erhalten mit $M(x) = \frac{F}{2} \cdot x$:

$$\alpha = \int_{x=0}^{x=L/2} \frac{F \cdot x \cdot 6}{h^3 \cdot b \cdot E} \cdot dx = \left[\frac{F \cdot x^2 \cdot 3}{h^3 \cdot b \cdot E}\right]_{x=0}^{x=L/2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{F \cdot L^2}{h^3 \cdot b \cdot E}$$

2 Elastizitätsmodul E (dynamischer Fall)

In diesem Versuch soll das Elastizitätsmodul über die Schallgeschwindigkeit im Medium bestimmt werden. Dabei wird mit einem Pendel an die eine Seite des zu untersuchenden Stabes angeschlagen.[1] Auf der anderen Seite des Stabes wird mit Hilfe eines Piezokristalls oder kleinen Laufsprechers[2] die angekommende Schallwellen registriert. Durch Reflexionen am Stabende erreicht der Schall regelmäßig das Stabende. An den Impulsgeber[3] wird eine Zähleinheit angeschlossen und so konfiguriert, dass die Zeit zwischen 1. und n. Einstreffen eines Schallsignals gemessen wird. Gemessen wird also die Zeit, die der Schall für eine Strecke von $s = (n-1) \cdot L \cdot 2$ braucht.

$$v = \frac{(n-1) \cdot L \cdot 2}{t} \qquad\qquad n = \frac{v}{2 \cdot L} \cdot t + 1$$

Wir erhalten die Geschwindigkeit v also, indem wir n über t auftragen und die aus der Linearen Regression erhaltene Steigung mit $2L$ multiplizieren. Dieses Verfahren ist sinnvoller, als wenn man v nur anhand eines Messpaares (T, n) bestimmt, da bei der Regression die statistischen Fehler deutlich abnehmen.

Wir betrachten nun ein Stabelement der Länge Δx mit der Masse $\Delta m = A \cdot \rho \Delta x$. Es gilt das elastische Gesetz:

$$F = E \cdot A \cdot \frac{\Delta L}{L}$$

Bei Übergang zu infinitesimalen Größen mit der Auslenkung s des Stabelements wird dies zu:

$$F = E \cdot A \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \cdot \Delta x$$

[1] Vorsicht: nicht zu weit auslenken, da sonst der Piezokristall beschädigt werden könnte.
[2] der in diesem Fall als Mikrophon fungiert
[3] den Piezokristall oder den Lautsprecher

Diese Kraft bewirkt eine Beschleunigung des Stabelements nach dem Newton'schen Axiomen:

$$F = m \cdot a = \Delta m \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \rho \cdot A \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

Dies führt zu der Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \underbrace{\frac{E}{\rho}}_{v^2} \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$$

in der wir v indentifizieren können. Für das Elastizitätsmodul folgt damit:

$$E = \rho \cdot v^2$$

Vor jeder Messung muss zuerst ein Bereich für die Anschlagsstärke gefunden werden, in dem die Störsignale, die durch anderen Moden auftreten, nicht registriert werden. Allerdings muss der Schall nach mehrfacher Reflexion immer noch registrierbar sein.

3 Schubmodul G

Ein Stab in Zylinderform wird am oberen Ende festeingespannt und am underen Ende mit Hilfe einer daran montierten Drehscheibe verdreht. Nach einer kleinen Verdrehung messen wir die Schwingungsdauer ohne, mit zwei und mit vier Zusatzmassen. Die Trägheitsmomente der Zusatzmassen lassen sich über den Steinerschen Satz leicht berechnen. Benötigt dazu wird das Trägheitsmoment Θ_V der Zusatzmasse um seine vertikale Achse, seine Masse M und der Abstand zum Drehzentrum r. Das gesamte Trägheitsmoment ergibt sich dann zu:

$$\Theta = \Theta_V + Mr^2$$

Vergleichbar mit dem elastische Gesetz gibt es auch ein Gesetz für die Scherung. Die lineare Näherung gilt nur für kleine Winkel, sodass man im Versuch nicht über ca. 10° verdrehen sollte:

$$\alpha = \frac{1}{G} \cdot \frac{F}{A}$$

Dabei ist A nicht mehr wir bei dem elastischen Gesetz die Fläche, auf der die Kraft senkrecht steht, sondern die Fläche, an der F tangential angreift. G nennt man den Schubmodul. Damit gilt für einen Hohlzylinder mit Länge L, Radius r und Wanddicke dr beim Angreifen eines Drehmomentes dM:

$$dM = r \cdot dF = r \cdot A \cdot G \cdot d\alpha \qquad A = 2\pi r \cdot dr$$

Den Winkel α erhält man aus dem Drehwinkel φ über $\alpha = \frac{r \cdot \varphi}{L}$ mit der Näherung $\tan(\alpha) = \alpha$.

$$dM = \frac{2\pi \cdot G \cdot \varphi}{L} \cdot r^3 \cdot dr$$

Damit ergibt sich für einen Vollzylinder mit Radius R:

$$M = \int_{r=0}^{r=R} dM = \underbrace{\frac{\pi \cdot G \cdot R^4}{2L}}_{D} \cdot \varphi$$

M ist ein rücktreibendes Drehmoment, das linear vom Auslenkwinkel φ abhängt. Damit ergibt sich mit dem Trägheitsmoment Θ die (ungedämpfte) Schwingungsgleichung:

$$\ddot{\varphi} + \underbrace{\frac{D}{\Theta}}_{\omega^2} \varphi = 0$$

Daraus folgt sofort die Periodendauer T, die im Versuch gemessen werden soll.

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\Theta}{D}}$$

Für den Schubmodul ergibt sich:

$$G = \frac{8 \cdot \pi \cdot L \cdot \Theta}{R^4 \cdot T^2}$$

Da sich aber das Trägheitsmoment der Scheibe nur schwer berechnen lässt, werden wir die Änderungen der quadrierten Schwingungszeit $\Delta(T^2)$ und die Änderung des Trägheitsmomentes $\Delta\Theta$, das wir durch Zusatzmassen erzeugen, verwenden, um G zu berechnen:

$$G = \frac{8 \cdot \pi \cdot L \cdot \Delta\Theta}{R^4 \cdot \Delta(T^2)}$$

Generell könnte man den Schubmodul auch über eine statische Methode messen. Dazu müsste man die Gleichgewichtslage bei einer bekanten Kraft messen. Aber die Messung des Schwerwinkels α, der angreifenden Kraft F und der Querschnittsfläche A müsste möglichst genau sein. Allerdings dürfte die Messung der Periodendauer T im dynamischen Fall deutlich genauer sein.