Versuchsvorbereitung P1-11: Elastizität

Kathrin Ender
Gruppe 10

18. November 2007

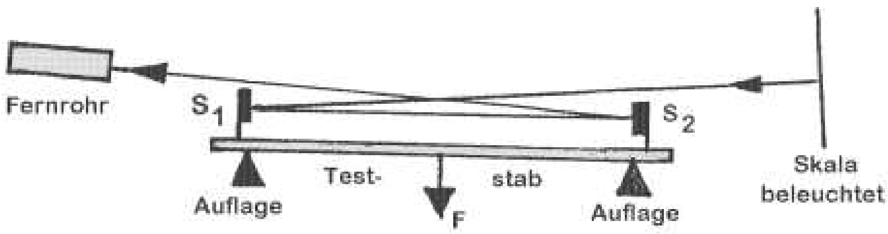
Inhaltsverzeichnis

0 Aufgabenstellung

In diesem Verusch soll das Verhalten von Körpern bei Belastung durch äußere Kräfte untersucht werden. Es sollen für einige Stoffe die elastischen Konstanten bestimmt werden. Das Elastitizitätmodul E wird einmal durch die Methode der Balkenbiegung (Aufgabe 1) und einmal durch Bestimmung der Schallgeschwindigkeit im Stoff (Aufgabe 2) bestimmt. Das Schubmodul G wird aus der Schwingungsdauer von Trosionschwingungen bestimmt (Aufgabe 3).

1 Bestimmung des Elastizitätmoduls aus der Balkenbiegung bei Belastung

Bei diesem Versuch wird ein Stab der Länge L (Breite b und Höhe h), der an beiden Enden aufliegt mittig mit einem Gewicht belastet. Aus dem Kippungswinkel α kann das Elastizitätmodul bestimmt werden. Zur Vereinfachung kann auch ein Stab der Länge $L/2$ betrachtet werden, der nur an einer Seite aufliegt und mit dem der Kraft $F/2$ belastet wird.



Das Elastizitätsmodul ist eine stoffspezifische Konstante, die mit der Stauchung, bzw. Dehnung zusammenhängt, die bei einem Stab von bestimmten Querschnitt bei Belastung durch Kraft in Längsrichtung auftritt.

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{E}\frac{F}{A}$$

E Elastizitätsmodul ΔL Änderung der Stablänge L ursprüngliche Stablänge

F angreifende Kraft A Querschnittsfläche

Bei unserem Stab wirkt nun durch die angreifende Kraft ein Drehmoment. Dieses Drehmoment hängt ab von der Entfernung x vom Auflagepunkt. Am Auflagepunkt selbst ist es Null und in der Mitte des Stabes $F/2 \cdot L/2$. Der Biegewinkel α setzt sich zusammen aus den Beiträgen $d\alpha$ der Stabelement der Länge dx, die sich am Ort x befinden. In der Mitte des Stabes befindet sich die sogenannte neutrale Faser $(y = 0)$[1]. Diese Faser bleibt unverändert. Über der neutralen Faser findet in unerem Fall durch die Biegung nach unten eine Dehnung der Fasern statt. Unter der neutralen Faser findet eine Stauchung statt. Je höher über der neutralen Faser desto größer ist die Dehnung und je weiter unten desto größer ist die Stauchung. Durch den Ausdruck

$$dl = y \cdot d\alpha$$

lässt sich diese Dehnung, bzw. Stauchung beschreiben. Setzt man diese Änderung der Stablänge in die elastische Formel ein mit der ursprünglichen Stablänge dx, dem Querschnitt $dA = b \cdot dy$, so erhält man die Kraft dF die auf das Stabelement wirkt.

$$dF = \frac{dl}{dx} \cdot E \cdot b \cdot dy = \frac{y \cdot d\alpha}{dx} \cdot E \cdot b \cdot dy$$

[1] x-Richtung ist die Längsrichtung und y-Richtung ist die Vertikalrichtung

Durch die Kraft dF entsteht ein Drehmoment:

$$dM = y \cdot dF$$

Nun kann man über dy integrieren.

$$M = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 \cdot \frac{d\alpha}{dx} \cdot E \cdot b \cdot dy$$

$$M = \frac{d\alpha}{dx} \frac{h^3}{12} \cdot E \cdot b \cdot$$

Dieses Drehmoment kann man nun gleichsetzten mit dem oben überlegten. Löst man dann nach $d\alpha$ auf so erhält man:

$$d\alpha = \frac{6F}{h^3 Eb} \cdot x \cdot dx$$

Durch Integration über dx mit den Grenzen 0 und $L/2$ erhält man:

$$\alpha = \frac{3 \cdot F \cdot L^2}{4 \cdot E \cdot b \cdot h^3}$$

Den Biegungswinkel α kann man in unserem Versuchsaufbau durch eine beleuchtet Skala bestimmen. An den Enden des Stabes sind Spiegel montiert. Durch ein Fernrohr, dass man auf den skalennahen Spiegel richtet, kann man über den zweiten Spiegel die Skala sehen. Biegt sich nun der Balken, so verändert sich auch der Anstellwinkel der Spiegel im Verhältnis zum Blickwinkel. Da sich auch das Lot verschiebt, ändert sich der Einfallwinkel des Strahls insgesamt um 2α bei einem Biegungswinkel von α. Der Strahl trifft also um $2\alpha L$ verschoben auf den skalenfernen Spiegel [2]. Dort ändert sich der Einfallswinkel von 2α auf 4α, so dass der Strahl sich um weitere $4\alpha \cdot (L + l)$ verschiebt, wobei l die Entfernung der Skala vom Stabende ist. Insgesamt ist der Strahl also um

$$s \approx 2\alpha \cdot L + 4\alpha \cdot (L + l)$$

von der Stellung ohne Biegung verschoben.

2 Bestimmung des Elastizitätsmoduls aus der Geschwindigkeit von Longitudinalwellen in Stäben

Nun soll das Elastizitätsmodul mit einer dynamischen Messmethode über die Geschwindikeit von Longitudinalwellen in einem Stoff bestimmt werden. Dafür wird in einem Stab druch einen Stoß mit einer Pendelkugel eine Longitudinalwelle erzeugt. Diese Welle breitet sich nun im Stab aus und wird an den Stabenden jeweils reflektiert. Am erregerfernen Stabende wird durch einen piezoelektrischen oder einen elektrodynamischen Detektor, der ankommende Impuls registiert. Der piezoelektrische Dektor besteht aus einem Piezokristall, der druch den Schallimpuls angeregt einen elektrischen Impuls abgibt. Der elektrodynamische Detektor ist im Prinzip ein Mikrophon. Registriert der Detektor den ersten Impuls, so wird ein Zähler gestartet. Da die Länge L des Stabes bekannt ist kann nun aus der T, die die Welle braucht um (n-1)mal im Stab hin- und herzulaufen [3] die Ausbreitungsgeschwindigkeit bestimmen:

$$v = \frac{(n-1) \cdot 2L}{T}$$

[2] diese Näherung gilt nur für kleine Winkel

[3] (n-1)mal, da der erste Impuls ja des Zähler startet.

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit kann also ermittelt werden, indem man T über m aufträgt, wobei $m = (n-1) \cdot 2L$. Die Steigung der Geraden entspricht dann $1/v$. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit über eine lineare Regression zu bestimmen, wenn mehrer (m,T)-Wertepaare vorliegen, ist genauer als diese nur über ein Wertepaar zu bestimmen, da die statistischen Fehler minimiert werden, je mehr Messungen man durchführt.

Der Zusammenhang zwischen den E-Modul und der Ausbreitungsgeschwindigkeit v lässt sich über das elastische Gesetz herleiten. Betrachtet man die orts- und zeitabhängige Auslenkung s einer Querschnittsfläche im Vergleich zum Ruhezustand, so ergibt sich:

$$F = E \cdot A \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \cdot \Delta x$$

Für die beschleunigende Kraft auf das Stabelement Δx mit der Masse $\Delta m = \varrho \cdot A \cdot \Delta x$ gilt:

$$F = \varrho \cdot A \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

Setzt man nun beide Kräfte gleich, so erhält man:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{E}{\varrho} \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$$

Durch Vergleich mit der bekannten Wellengleichung erhält man den gesuchten Zusammenhang:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\varrho}}$$

3 Bestimmung des Schubmoduls aus der Schwinungsdauer von Torsionsschwingungen

Nun soll für einen zylindrischen Stab, der am oberen Ende eingespannt ist, durch die Schwindungdauer der Drehschwinung, die durch Verdrehen der Drehscheibe am unteren Stabende entsteht, das Schubmodul G bestimmt werden. Damit noch ein linearer Zusammenhang vorliegt darf der Stab nur um kleine Winkel $\varphi(<10°)$ verdrillt werden. Für den Scherwinkel gilt beim linearen Zusammenhang:

$$\alpha = \frac{1}{G} \cdot \frac{1}{A} \cdot F$$

Wobei F die tangential angreifende Kraft ist. Den Scherwinkel kann man aus dem Verdrillungswinkel φ bestimmen: $\alpha = r \cdot \varphi / L$. r ist hierbei der Radius des zylindrischen Stabes und L die Länge. Auf den Stab wirkt durch die angreifende Kraft nun ein Drehmoment:

$$dM = \frac{2\pi \cdot D \cdot \varphi \cdot r^3}{L} \cdot dr$$

Durch Integration über den ganzen Zylinder (von r=0 bis r=R) erhält man:

$$M = \frac{\pi \cdot D \cdot \varphi \cdot R^4}{2L}$$

Da gilt: $M = D^* \cdot \varphi$, lässt sich aus dieser Gleichung für das Drehmoment das Richtmoment D^* ablesen: $D^* = \pi \cdot G \cdot R^4/(2L)$. Betrachtet man nun die Differentialgleichung für Drehschwingungen:

$$\Theta \ddot{\varphi} + D^* \varphi = 0$$

so folgt für die Schwingungsdauer

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{D^*}} \qquad \Rightarrow G = \frac{8\pi L\Theta}{R^4T^2}$$

Ist das Trägheitsmoment Θ bekannt, so lässt sich aus der gemessenen Schwingungsdauer das Schubmodul berechnen. Da das Trägheitsmoment mit der Drehscheibe alleine nicht leicht zu bestimmen ist, soll der Versuch mit Zusatzmassen durchgeführt werden. Das Trägheitsmoment dieser Zusatzmassen, lässt sich über den Steinerschen Satz bestimmen $\Theta_{neu} = \Theta_{alt} + m \cdot a^2$, wobei a die Entfernung der Symmetrieachse der Zusatzmasse von der Drehachse ist. Betrachtet man nun nur die Differenzen zwischen den Gesamtträgheitsmomenten so muss das Trägheitsmoment der Scheibe nicht beachtet werden. Das Schubmodul lässt sich berechenen aus:

$$G = \frac{8\pi \cdot L \cdot \Delta\Theta}{R^4 \cdot \Delta(T^2)}$$

Eine mögliche statische Messmethode wäre die Auslenkung aus der Ruhelage (also den Scherwinkel) durch eine tangential angreifende Kraft bekannter Größe direkt zu bestimmen, wenn der Stab an einem Ende eingespannt ist. Der Scherwinkel lässt sich aber nur ungenau bestimmen, daher dürfte die im Versuch gewählte dynamische Messmethode besser sein.