

Versuchsauswertung P1-11: Elastizität

Kathrin Ender, Michael Walz
Gruppe 10

25. November 2007

Inhaltsverzeichnis

0	Zur Auswertung	2
1	Elastizitätsmodul E (statischer Fall)	2
1.1	Aluminium	3
1.2	Messing	3
1.3	PVC	4
1.4	Eisen	5
2	Elastizitätsmodul E (dynamischer Fall)	5
2.1	Edelstahl	6
2.2	Aluminium	7
2.3	Kupfer	9
2.4	Messing	10
2.5	Hart-PVC	12
3	Schubmodul G	13
3.1	Aluminium	13
3.2	Kupfer	14
4	Dynamischer vs. Statischer Fall	14
5	Quellen	14

0 Zur Auswertung

Alle Messwerte befinden sich im handgeschrieben angehängten Versuchsprotokoll. Diese Werte wurden am Computer abgetippt und dem Programm GNUPLOT¹ zur linearen Regression übergeben und die Werte für Steigung, Y-Achsenabschnitt und den statistischen Fehler der beiden von dort übernommen. GNUPLOT nutzt zur linearen Regression die Formeln 16–18 aus dem Fehlerrechnungsskript zum Praktikum.

Die meisten Messwerte mussten aufgrund der Ableseskalen (oder aus sonstigen Gründen) noch umgerechnet werden. Aufgrund des massiven Rechenaufwandes erledigten wir dies direkt am Computer unter GNUPLOT mittels der Option „using“²; sowohl bei der Regression (über „fit“) wie auch beim Erstellen der Graphen (über „plot“).

1 Elastizitätsmodul E (statischer Fall)

In diesem Versuch wird die zusätzliche Biegung des Balkens gemessen, die entsteht, wenn man durch ein Gewicht eine Kraft F auf die Mitte des Balkens wirken lässt. Daraus lässt sich der Elastizitätsmodul für die verschiedenen betrachteten Materialien berechnen.

Aus der Vorbereitung entnehmen wir die Formeln

$$\Delta s = 2 \cdot \alpha \cdot L + 4 \cdot \alpha \cdot (L + l) \quad \alpha = \frac{3 \cdot F \cdot L^2}{4 \cdot E \cdot b \cdot h^3}$$

Mit $F = m \cdot g$ und $\Delta s = s_{\text{gemessen}} - s_{\text{Nulllage}}$ folgt daraus:

$$s_{\text{gemessen}} = \underbrace{\frac{(3 \cdot L + l) \cdot 3 \cdot g \cdot L^2}{2 \cdot E \cdot b \cdot h^3}}_B \cdot m + \underbrace{s_{\text{Nulllage}}}_A$$

Die Nulllage wurde dabei einfach als Messwert mit angehängter Masse $m = 0$ betrachtet. Nach linearer Regression $s = B \cdot m + A$ erhalten wir:

$$E = \frac{(3 \cdot L + l) \cdot 3 \cdot g \cdot L^2}{2 \cdot B \cdot b \cdot h^3}$$

Für alle Messungen war der Abstand vom skalennahen Spiegel zur Skala $l = 55$ cm. Die Breite und die Höhe der Stäbe wurden mit einer Schieblehre, die Abstände l und L mit einem Messstab gemessen. Der relative statistischen Fehler von B überträgt sich direkt auf den relativen Fehler von E .

$$\Delta E_{\text{rel,stat}} = \Delta B_{\text{rel,stat}}$$

Fehler ergaben sich dadurch, dass nicht klar war, ob man die Gesamtlänge des Stabes für die Biegung berücksichtigen soll oder nur einen Teil. Ebenso war der Abstand zwischen den Spiegeln etwas kleiner als die Stablänge, was laut Versuchsanleitung aber ignoriert wurde. Für beide Fälle nahmen wir die Gesamtlänge L des Stabes.

¹<http://www.gnuplot.info/>

²<http://www.gnuplot.info/docs/node133.html>

1.1 Aluminium

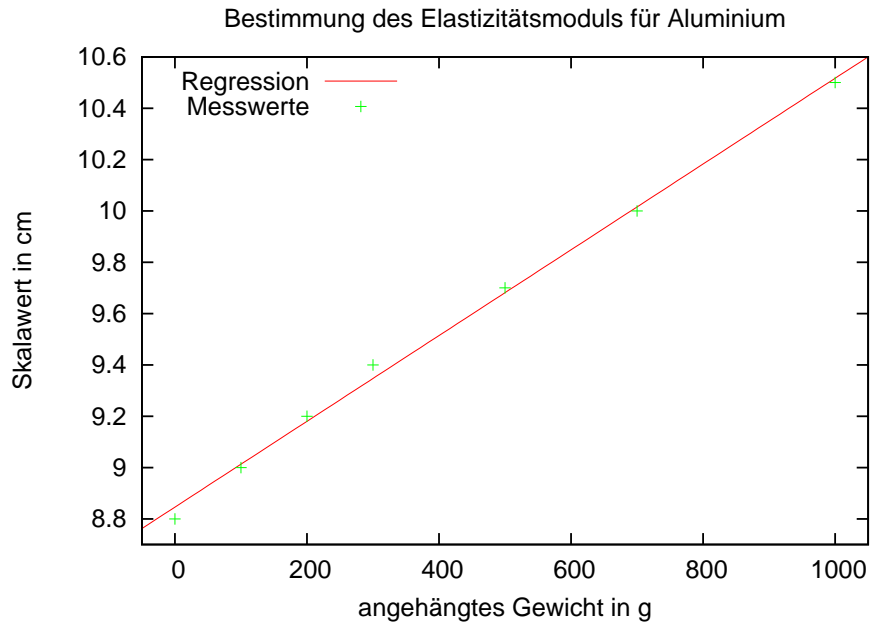
Für einen Aluminiumstab mit der Länge $L = 49,8$ cm, der Breite $b = 2,50$ cm und der Höhe $h = 0,59$ cm erhalten wir für die Regression:

$$A = 8,85 \text{ cm}$$

$$\Delta A_{\text{rel}} = 0,24\%$$

$$B = 0,00167 \text{ cm}$$

$$\Delta B_{\text{rel}} = 2,4\%$$



Damit ergibt sich für den Elastizitätsmodul und im Vergleich zum Literaturwert ein relativer Fehler:

$$E = 63,5 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \quad E_{\text{Demtröder}} = 71 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \quad \Delta E_{\text{rel}} = 10,6\%$$

1.2 Messing

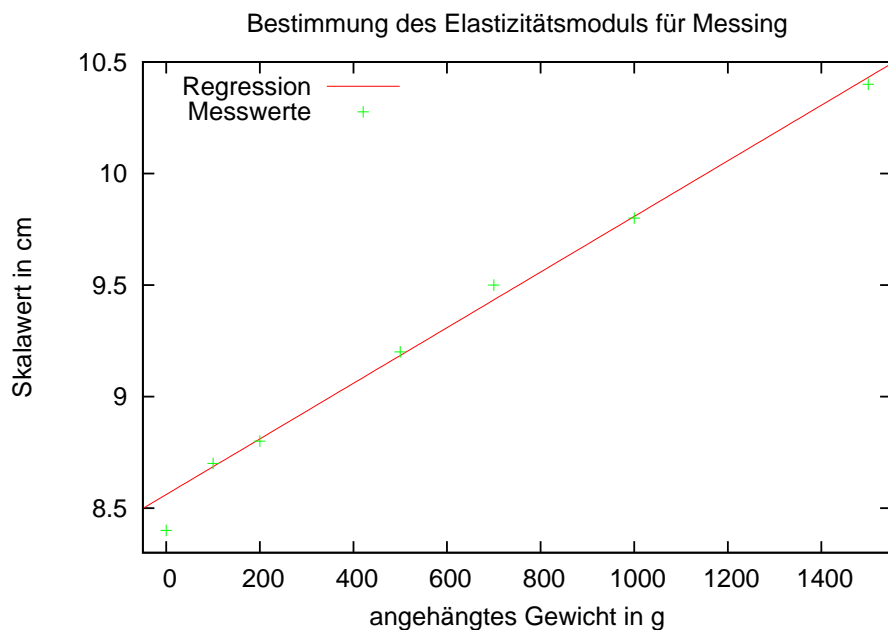
Für einen Messingstab mit der Länge $L = 49,8$ cm, der Breite $b = 2,51$ cm und der Höhe $h = 0,60$ cm erhalten wir für die Regression:

$$A = 8,56 \text{ cm}$$

$$\Delta A_{\text{rel}} = 0,53\%$$

$$B = 0,00125 \text{ cm}$$

$$\Delta B_{\text{rel}} = 4,8\%$$



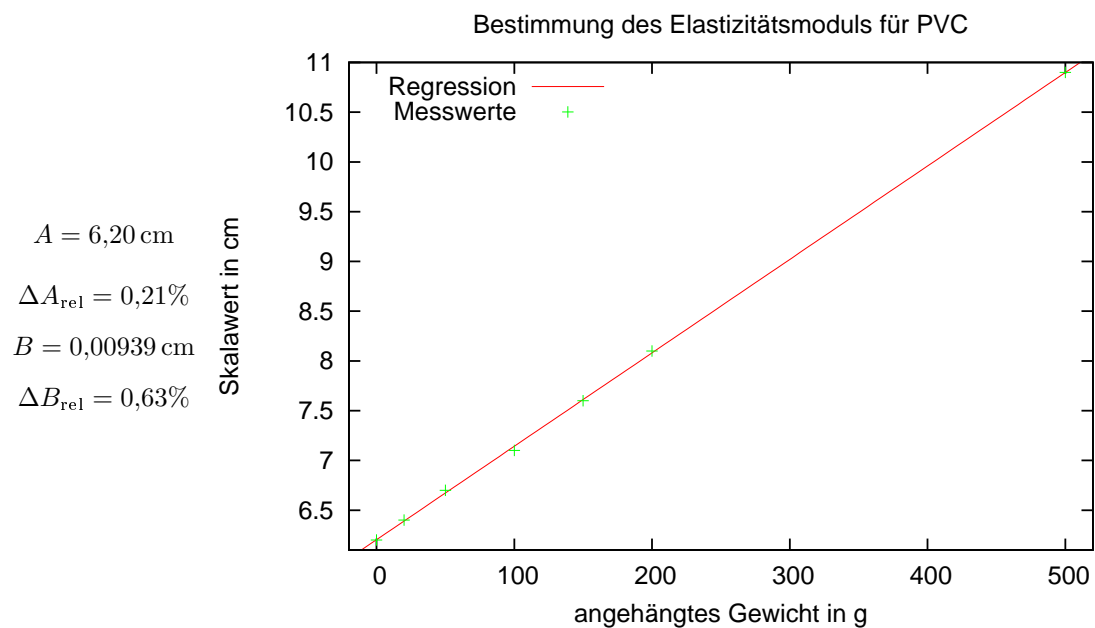
Damit ergibt sich für den Elastizitätsmodul und im Vergleich zum Literaturwert ein relativer Fehler:

$$E = 80,7 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \quad E_{\text{Paus}} = 100 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \quad \Delta E_{\text{rel}} = 19,3\%$$

Da Messing aber eine Legierung ist, kann der Wert auch durchaus vom Literaturwert abweichen.

1.3 PVC

Für einen PVCstab mit der Länge $L = 49,8 \text{ cm}$, der Breite $b = 2,555 \text{ cm}$ und der Höhe $h = 0,625 \text{ cm}$ erhalten wir für die Regression:



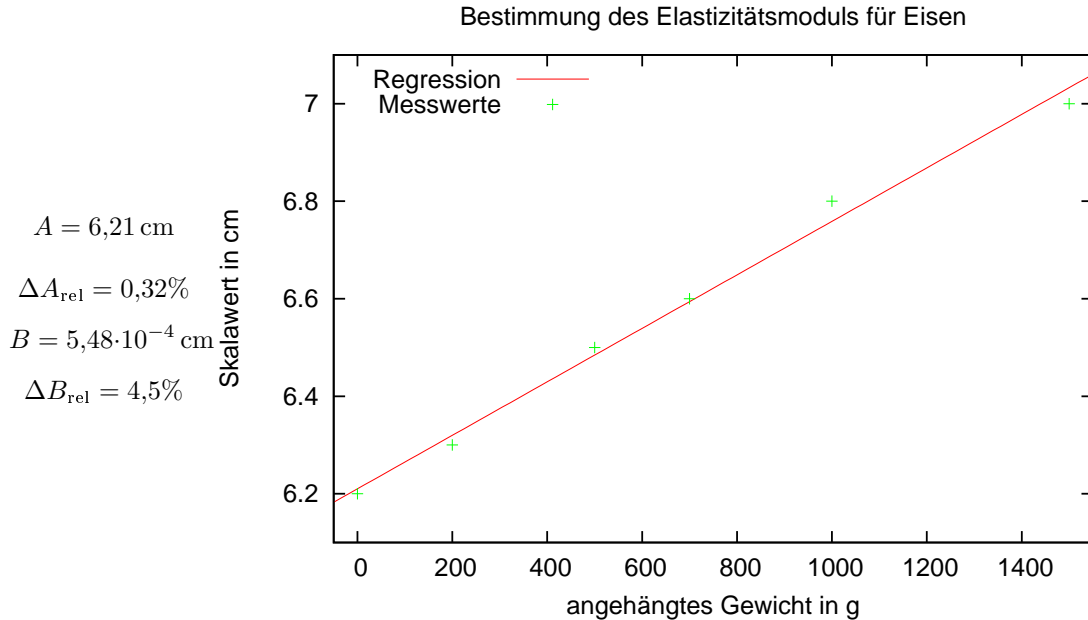
Damit ergibt sich für den Elastizitätsmodul und im Vergleich zum Literaturwert ein relativer Fehler:

$$E = 9,31 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \quad E_{\text{fh-frankfurt}} = (1 - 3,5) \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \quad \Delta E_{\text{rel}} = 166\%$$

Elastizitätsmodulwerte für PVC sind in der Literatur kaum zu finden. Als Vergleichswert nahmen wir schließlich einen Wert der Internetseite der FH Frankfurt. Unser Messwert liegt zwar deutlich daneben, aber wenigstens die Größenordnung stimmt. Vorallem ist zu erkennen, dass PVC deutlich kleinere Elastizitätsmodule als die Metalle besitzt.

1.4 Eisen

Für einen Eisenstab mit der Länge $L = 49,8\text{ cm}$, der Breite $b = 2,495\text{ cm}$ und der Höhe $h = 0,595\text{ cm}$ erhalten wir für die Regression:



Damit ergibt sich für den Elastizitätsmodul und im Vergleich zum Literaturwert ein relativer Fehler:

$$E = 189 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \quad E_{\text{Paus}} = 212 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \quad \Delta E_{\text{rel}} = 10,8\%$$

2 Elastizitätsmodul E (dynamischer Fall)

In der zweiten Aufgabe haben wir das E-Modul durch eine dynamische Messmethode bestimmt. Diese dynamische Messmethode soll mit der statischen aus Aufgabe eins verglichen werden (siehe 4). Beim Versuch wurden in einem Stab des Stoffes, dessen E-Modul zu bestimmen war durch anstoßen mit einer Pendelkugel eine Longitudinalwelle erzeugt. Mit Hilfe eines Zählers wurde nun gemessen wie lange die Welle braucht um den Stab eine bestimmte Anzahl von Malen zu durchlaufen, wobei die Welle jeweils am Ende reflektiert wird. Die Wellenimpulse wurden am Zählerende des Stabes über zwei verschiedene Detektoren registriert. Entweder mittels eines Piezokristalls oder mittels eines Lautsprechers.

Bei der Durchführung des Versuches wurde sehr schnell klar, dass je nach Auslenkung der Pendelkugel, die Ergebnisse für dieselbe Durchlaufanzahl stark schwankten. Beschränkte man sich jedoch immer auf ungefähr dieselbe Auslenkung, so waren die Ergebnisse reproduzierbar. Da diese Reproduzierbarkeit der Ergebnisse allerdings für mehrere Auslenkungen zu traf, war es schwer einheitliche Ergebnisse zu erhalten. Wir bemühten uns daher Messungen immer mit möglichst geringer Auslenkung durchzuführen. Bei den durchgeführten linearen Regressionen wurde jeweils T über n aufgetragen. Dabei ergibt sich die Steigung der Geraden zu $2L/v$.

$$v = \frac{(n-1) \cdot 2L}{T} \Leftrightarrow T = \underbrace{-\frac{2L}{v}}_{=a \text{ y-Achsenabschnitt}} + \underbrace{\frac{2L}{v}}_{=b \text{ Steigung}} \cdot n$$

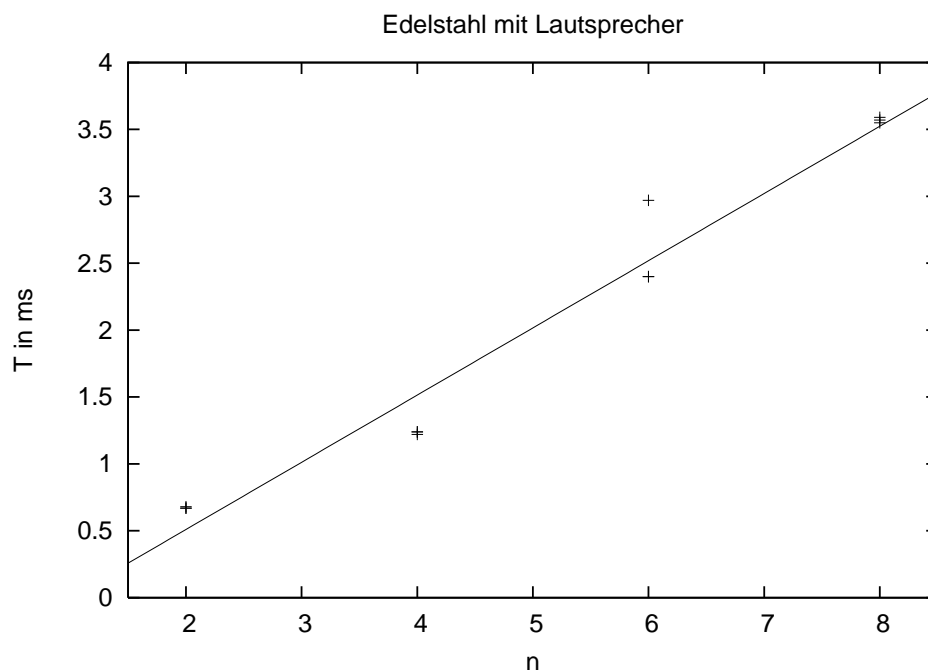
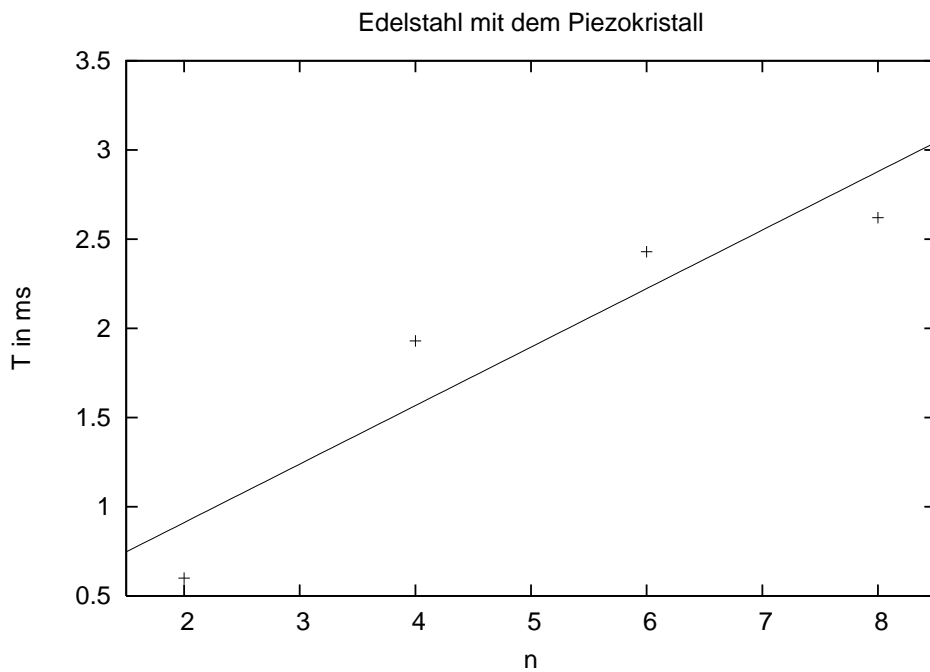
Aus der Steigung kann also die Ausbreitungsgeschwindigkeit v bestimmt werden. Und aus v kann man mit der Dichte, die sich aus den gemessenen Abmessungen der Stäbe und den auf

dem Aufgabenblatt gegebenen Massen, berechnen lässt, das E-Modul bestimmen.

$$E = v^2 \cdot \rho$$

2.1 Edelstahl

Es ergaben sich folgende Regressionsgeraden:



Da Edelstahl die erste Messung war, die wir durchführten als wir der Messmethode noch nicht so kritisch gegenüberstanden, sind diese Messwerte nicht unbedingt korrekt.

Messmethode	a in ms	b in ms	L in cm	ρ in g/cm^3	v in m/ms
Piezokristall	0,255	0,328	148,5	7,63	9,0549
Lautsprecher	-0,495	0,50233	148,5	7,63	5,9124

Als Literaturwert haben wir gefunden:

$$E_{\text{Demtröder}} = (108 - 212) \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$$

Für die Messwerte ergeben sich folgende Abweichungen vom Literaturwert (von der oberen Grenze):

- Piezokristall:

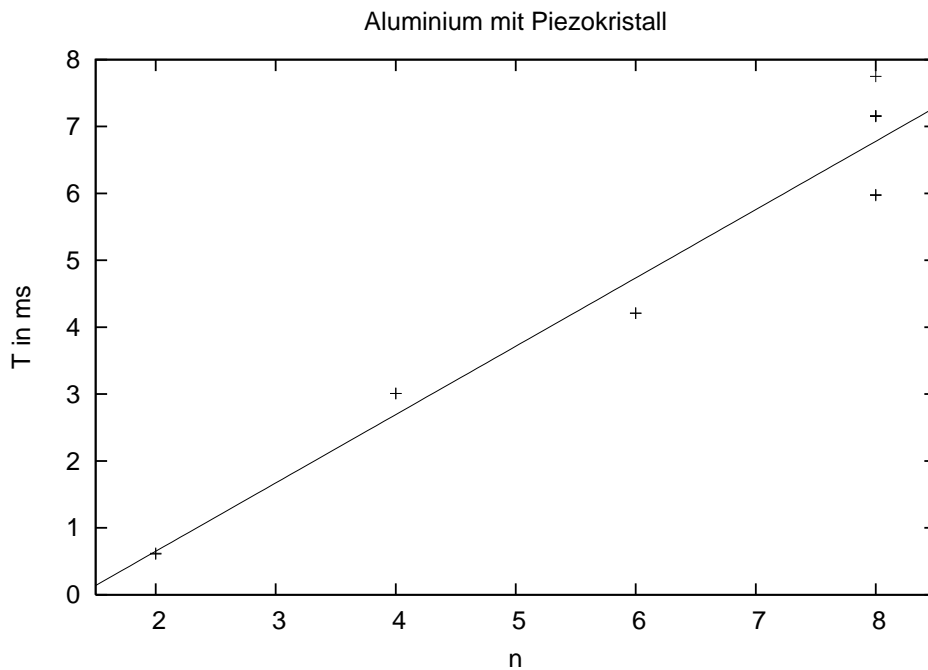
$$E_{\text{Stahl}} = 625 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2 \quad \Delta E = 195\%$$

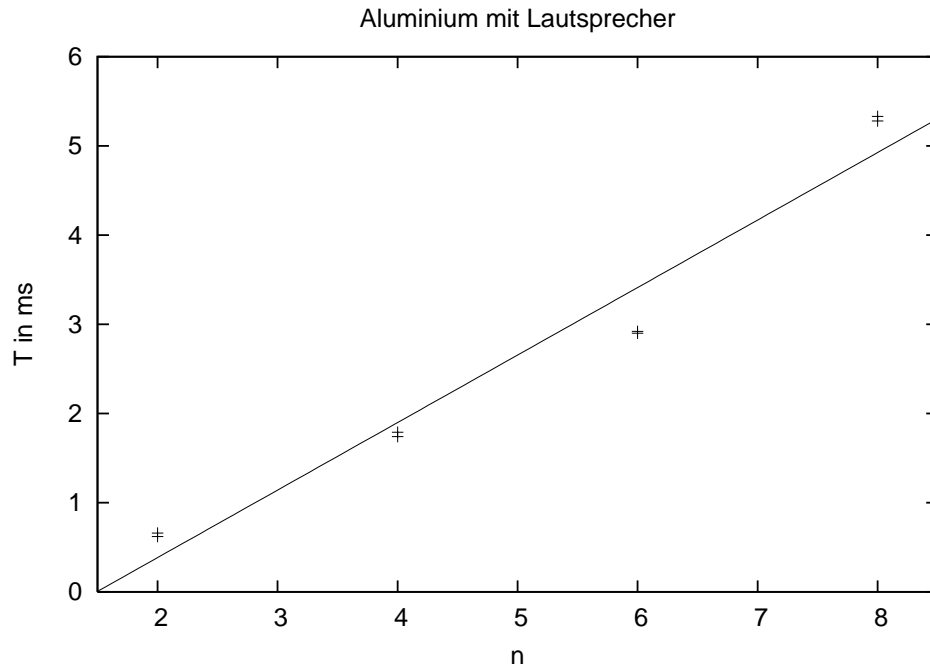
- Lautsprecher:

$$E_{\text{Stahl}} = 267 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2 \quad \Delta E = 25\%$$

Die Messung mit dem Piezokristall ist offensichtlich nicht aussagekräftig, da der Wert sehr stark abweicht.

2.2 Aluminium





Messmethode	a in ms	b in ms	L in cm	ρ in g/cm^3	v in m/ms
Piezokristall	-1,39271	1,02156	148,5	2,89	2,9073
Lautsprecher	-1,13	0,757	148,5	2,89	3,9234

Als Literaturwert haben wir gefunden:

$$E_{\text{Demtröder}} = 71 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$$

Für die aus den Messwerten errechneten Werte ergeben sich folgende Abweichungen vom Literaturwert:

- Piezokristall:

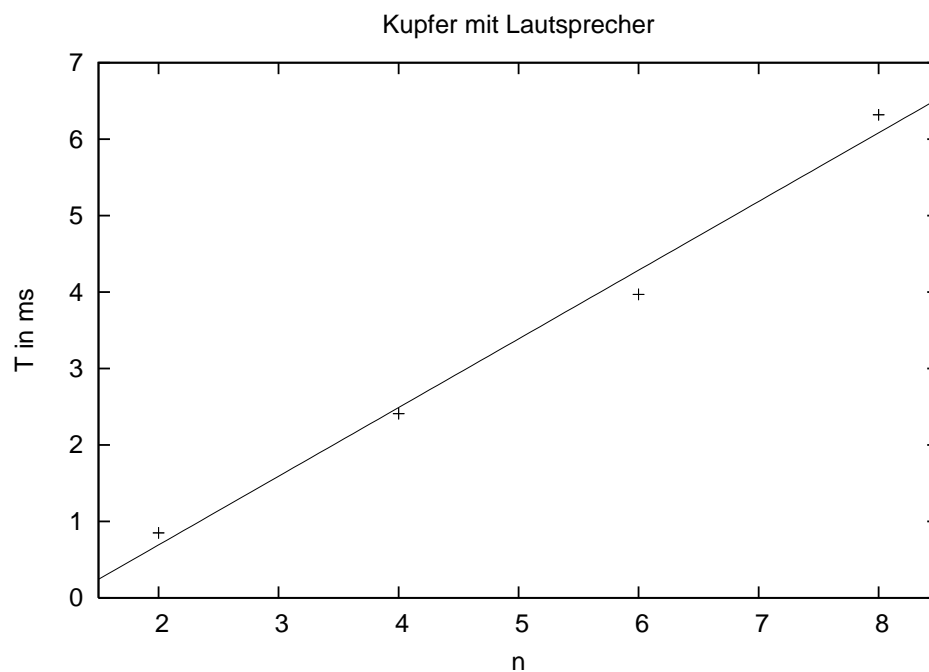
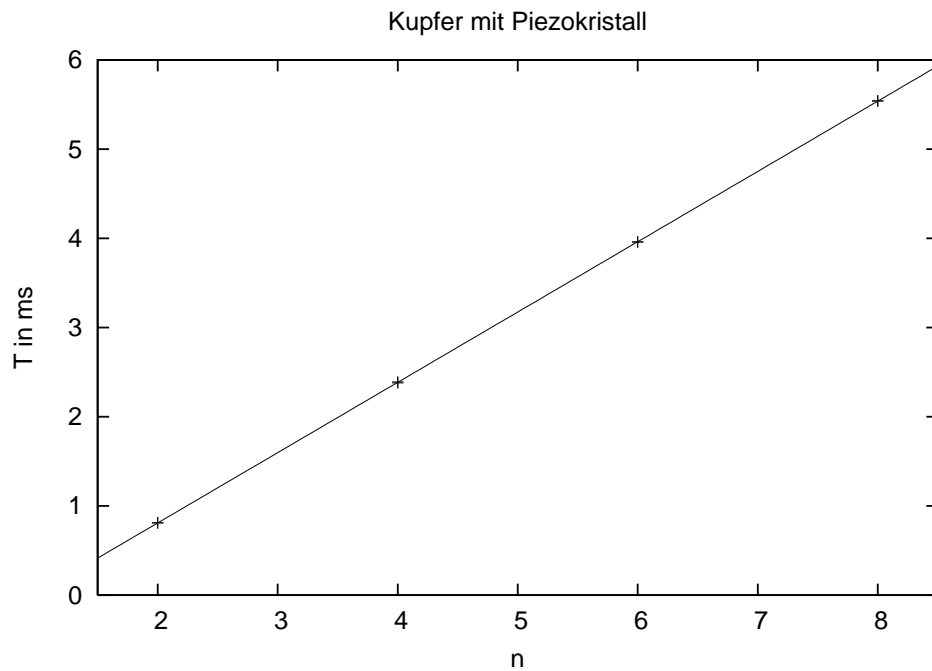
$$E_{\text{Alu}} = 24,43 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2 \quad \Delta E = 66\%$$

- Lautsprecher:

$$E_{\text{Alu}} = 44,48 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2 \quad \Delta E = 38\%$$

Auch diese Abweichungen sind beträchtlich, was sich eigentlich wieder nur durch systematische Fehler bei der Messung erklären lässt, da die Messpunkte an sich eine durchaus akzeptable Regressionsgerade bilden. Wahrscheinlich wurde die Auslenkung der Pendelkugel zwar einheitlich, aber zu groß gewählt.

2.3 Kupfer



Messmethode	a in ms	b in ms	L in cm	ρ in g/cm^3	v in m/ms
Piezokristall	-0,7675	0,78825	148,5	9,21	3,7678
Lautsprecher	-1,105	0,8985	148,5	9,21	3,3055

Als Literaturwert haben wir gefunden:

$$E_{\text{Demtröder}} = 125 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$$

Für die aus den Messwerten errechneten Werte ergeben sich folgende Abweichungen vom Literaturwert:

- Piezokristall:

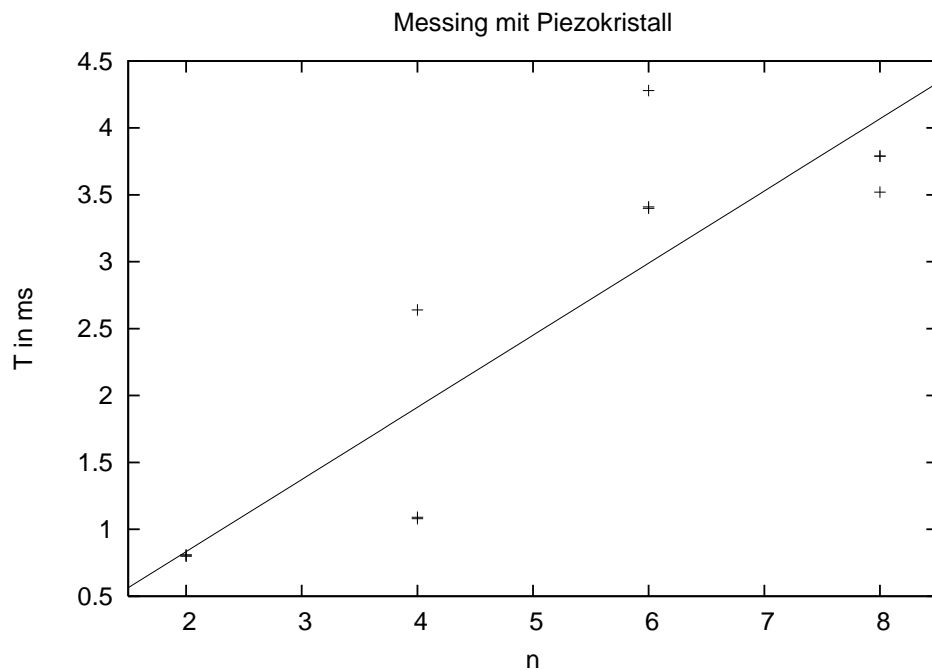
$$E_{Cu} = 130,8 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2 \quad \Delta E = 4,6\%$$

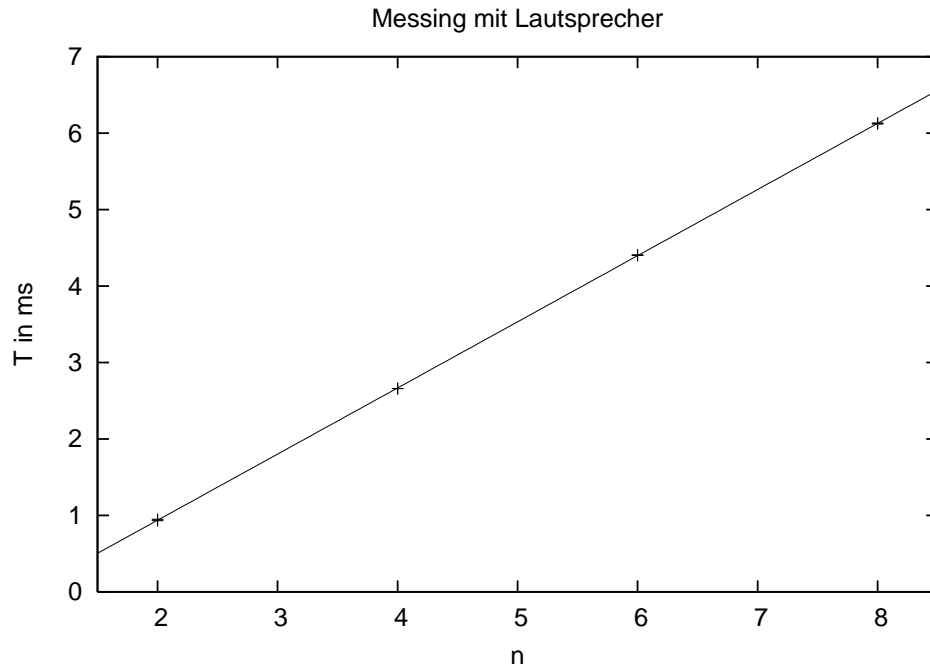
- Lautsprecher:

$$E_{Cu} = 100,7 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2 \quad \Delta E = 19\%$$

Für Kupfer unsere Messwerte also vernünftig. In diesem Fall schien der Piezokristall als Detektor geeigneter, da sowohl der errechnete Wert näher am Literaturwert liegt als auch die Messpunkte genauer auf der Regressionsgeraden liegen.

2.4 Messing





Messmethode	a in ms	b in ms	L in cm	ρ in g/cm^3	v in m/ms
Piezokristall	-0,245	0,757	148,5	8,7	3,9234
Lautsprecher	-0,79333	0,865167	148,5	8,7	3,4329

Als Literaturwert haben wir gefunden:

$$E_{\text{Paus}} = 100 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$$

Für die aus den Messwerten errechneten Werte ergeben sich folgende Abweichungen vom Literaturwert:

- Piezokristall:

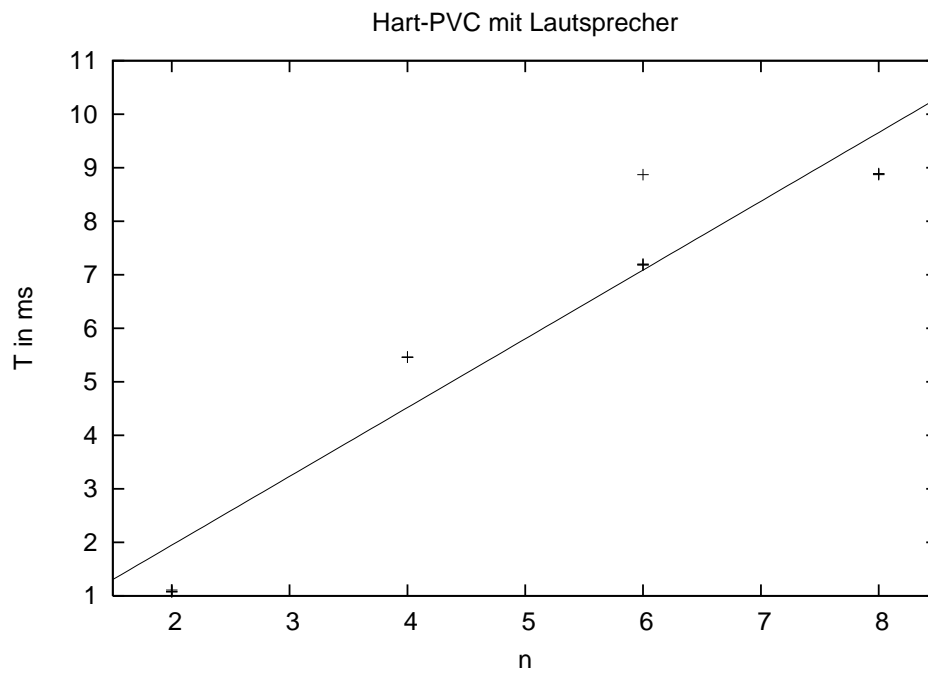
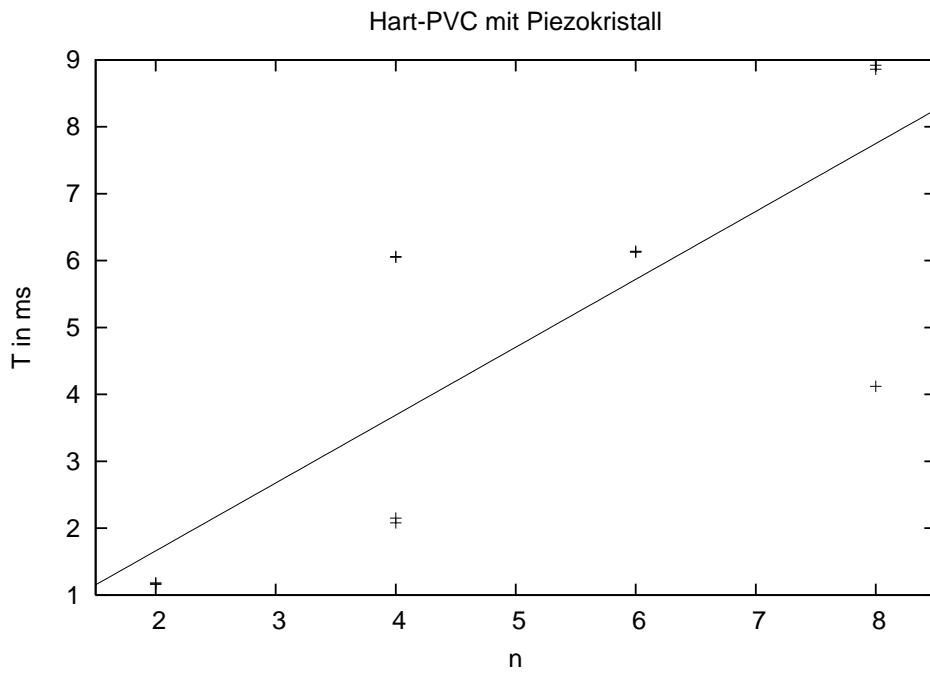
$$E_{\text{Mes}} = 134 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2 \quad \Delta E = 34\%$$

- Lautsprecher:

$$E_{\text{Mes}} = 102,5 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2 \quad \Delta E = 2,5\%$$

Da es sich bei Messing um eine Legierung handelt kann eigentlich kein eindeutiger Literaturwert angegeben werden. Da wir nicht wissen, welche Legierung wir vorliegen hatten, können wir daher auch keine klaren Aussagen darüber treffen, wie gut unserer Messergebnisse wirklich sind. Die Messung liegt aber auf jeden Fall in der richtigen Größenordnung. Im Gegensatz zu den Messungen bei Kupfer scheint bei Messing nun der Lautsprecher besser als Detektor geeignet zu sein. Es scheint nicht möglich zu sein eine allgemeine Aussage darüber zu treffen, welcher Detektor für diese Art von Messung besser ist. Es scheint jeweils noch vom zu untersuchenden Material abhängig zu sein.

2.5 Hart-PVC



Messmethode	a in ms	b in ms	L in cm	ρ in g/cm^3	v in m/ms
Piezokristall	-0,368485	1,01485	59,7	3,46	1,176
Lautsprecher	-0,623333	1,2852	59,7	2,46	0,929

Als Literaturwert haben wir gefunden:

$$E_{\text{FH-Frankfurt}} = (1 - 3,5) \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$$

Für die aus den Messwerten errechneten Werte ergeben sich folgende Abweichungen vom Literaturwert (von der oberen Grenze des Intervalls):

- Piezokristall:

$$E_{PVC} = 4,78 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2 \quad \Delta E = 3,7\%$$

- Lautsprecher:

$$E_{PVC} = 2,98 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2 \quad \text{liegt im Intervall}$$

Für PVC war es schwierig einen vernünftigen Kompromis für die Auslenkung zu finden, obwohl wir bereits den verkürzten Stab benutzten. Die Pendelkugel müsste sehr weit ausgelenkt werden um einen ausreichend starken Impuls zu erzeugen. Sobald man sie aber ein wenig größer machte wurden die gemessenen Zeiten kleiner. Daher ist es überraschend, dass die Messwerte doch so nah am Literaturwert liegt (gerade da auch die Messpunkte sehr stark um die Regressionsgerade streuen).

3 Schubmodul G

Ein Stab in Zylinderform wird am oberen Ende festeingespannt und am unteren Ende mit Hilfe einer daran montierten Drehscheibe verdreht. Nach einer kleinen Verdrehung messen wir die Schwingungsdauer ohne, mit zwei und mit vier Zusatzmassen. Die Trägheitsmomente der zylindrischen Zusatzmassen lassen sich leicht berechnen. Wir maßen den Durchmesser mit einer Schieblehre zu $2R = 6,985 \text{ cm}$. Die Masse war zu $M = 837 \text{ g}$ angegeben. Der Abstand der Schwerpunkte der Zusatzmassen zum Drehzentrum war mit $r = 110 \text{ mm}$ angegeben. Über den Steinerschen Satz erhält man nun leicht:

$$\Theta_{\text{Zusatzmasse}} = \frac{1}{2}MR^2 + Mr^2 = M \cdot \left(\frac{R^2}{2} + r^2 \right) = 1,0638 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Wir maßen die Gesamtschwingungszeit über viele Perioden und teilten anschließend durch diese Anzahl, um die Periodendauer T zu erhalten. Da wir immer zwei Messungen vornahmen, mittelten wir (Arithmetisches Mittel) noch über die beiden Periodendauern T .

3.1 Aluminium

Für den Aluminiumstab der Länge $L = 77,4 \text{ cm}$ mit dem Durchmesser $2R = 0,400 \text{ cm}$ ergaben sich folgenden Werte:

T in s	Zusatzmassen	T^2 in s^2	$\Delta(T^2)$ in s^2	$\Delta\Theta$ in $\text{kg} \cdot \text{m}^2$	$\frac{\Delta\Theta}{\Delta(T^2)}$ in $\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2}$
0,719	0	0,517	—	—	—
1,26	2	1,60	1,08	0,0213	0,0197
1,64	4	2,67	2,16	0,0426	0,0197

Die Δ -Werte bezeichnen jeweils die Differenz zum entsprechenden Wert mit 0 Zusatzmassen.

Entsprechend der Vorbereitung gilt für den Schubmodul:

$$G = \frac{8 \cdot \pi \cdot L}{R^4} \cdot \frac{\Delta\Theta}{\Delta(T^2)} = 2,40 \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

Die Literatur gibt einen Wert an, den wir bis auf 7,7% erreichen:

$$G_{\text{Demtröder}} = 2,6 \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

3.2 Kupfer

Für einen Kupferstab der Länge $L = 78,7 \text{ cm}$ mit dem Durchmesser $2R = 0,195 \text{ cm}$ ergaben sich folgenden Werte:

T in s	Zusatzmassen	T^2 in s^2	$\Delta(T^2)$ in s^2	$\Delta\Theta$ in $\text{kg} \cdot \text{m}^2$	$\frac{\Delta\Theta}{\Delta(T^2)}$ in $\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2}$
2,18	0	4,75	–	–	–
3,85	2	14,8	14,3	0,0213	0,00149
4,97	4	24,7	24,2	0,0426	0,00176

Wenn wir noch über die beiden Werte für $\frac{\Delta\Theta}{\Delta(T^2)}$ mitteln, erhalten wir für den Schubmodul:

$$G = 3,56 \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

Angesichts des Literaturwerts und unsere Abweichung davon

$$G_{\text{Demtröder}} = 4,6 \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \quad \Delta G = 22,6\%$$

müssen wir uns fragen, wo große Fehler aufgetreten sein können. Der Radius steht in der vierten Potenz im Nenner. Wenn wir beim Durchmesser nur um $0,05 \text{ mm}$ (dies war unsere kleinste Messeinheit!) daneben liegen würden, ergibt das schon eine Abweichung von ca. 10% von unserem Messwert. Ebenso war beim Messen der Länge nicht klar, um die Verdickungen zum Einspannen ganz oder teilweise dazu zählen. Wir zählten sie nicht zur Länge, obwohl sie nicht ganz eingespannt waren. Abweichungen von ca. 5 cm würden ca. 5% des Messwertes ausmachen. Im Vergleich dazu wurde die Zeit T und die Trägheitsmomente sehr genau gemessen, aber durch die Fehler in der Längenmessungen scheint der obige Fehler durchaus möglich.

4 Dynamischer vs. Statischer Fall

Ob die Messung des statischen oder des dynamischen Falls bessere Ergebnis liefert, kommt immer auf den Versuch an. Prinzipiell muss man beim statischen Fall immer Auslenkungen und Kräfte messen, während beim dynamischen Fall die Zeiten und Massenverteilung gemessen werden müssen. Je nach dem, was einfacher zu messen ist, bietet es sich an, den statischen oder dynamischen Fall zu betrachten.

Beim Elastizitätsmodul war die Messung der Auslenkung über die Spiegel und die Messung der Kraft durch genormte Testgewichte deutlich einfacher als die Messungen der Schalllaufzeit in den Stäben und die Bestimmung der Dichte über Gewicht und Stabausmessungen. Deshalb sind hier generell bessere Werte als beim statischen Fall zu erwarten.

Beim Schubmodul verhält es sich genau anderstherum. Die Periodendauer und die zusätzlichen Trägheitsmomente sind ziemlich einfach zu bestimmen. Beim statischen Fall hätte man allerdings das angreifenden Drehmoment und den Auslenkungswinkel messen müssen. Dies wäre deutlich ungenauer gewesen, weshalb hier auf den statischen Fall von vornherein verzichtet wurde.

5 Quellen

Die Literaturwerte entstammen:

- Wolfgang Demtröder; Experimentalphysik 1 (4. Auflage); Springer; Seite 168
- Hans Paus; Physik (3. Auflage); Hanser; Seite 177
- <http://chemie.fb2.fh-frankfurt.de/KUT/211KENNWE.htm#PVC>