

Inhaltsverzeichnis

0 Schreibweisen	4	6.3 GAM-Ungleichung	5	12 Stetigkeit	8
0.1 Intervale	4	6.4 Schwarz'sche Ungleichung	6	12.1 Grenzwerte bei Funktionen	8
0.2 Matrizen	4	7 Komplexe Zahlen \mathbb{C}	6	12.2 Stetigkeit	8
1 Aussagenlogik	4	7.1 Binomische Formel	6	12.3 ε - δ -Definition	8
1.1 Symbole	4	7.2 Polardarstellung	6	12.4 Umkehrfunktionen	8
1.2 De Morgan'schen Gesetze	4	7.3 Wurzel	6	12.5 Zwischenwertsatz	8
2 Mengen	4	7.4 Fundamentalsatz der Algebra	6	12.6 Beschränktheit	8
2.1 Russellsche Antinomie	4	7.5 (Un-)Ordnung in \mathbb{C}	6	13 Funktionenfolgen	8
2.2 Symbole	4	8 Vektorrechnung	6	13.1 Punktweise Konvergenz	8
2.3 De Morgan'sche Gesetze	4	8.1 Vektorraum	6	13.2 Gleichmäßige Konvergenz	8
2.4 Leere Menge \emptyset	4	8.2 Norm	6	13.3 Majorantenkriterium	8
3 Funktionen/Abbildungen	4	8.3 Skalarprodukt	6	13.4 Konvergenzradius r	8
3.1 Gleichheit von Funktionen	4	8.4 orthogonale Projektion	6	13.5 Wurzelkriterium	8
3.2 Surjektivität und Injektivität	4	8.5 Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren	6	13.6 Quotientenkriterium	8
3.3 Monotonie	4	8.6 Hesse Normalform	6	13.7 „Geometrisches Kriterium“	8
4 Reelle Zahlen	4	8.7 Vektoridentitäten	7	14 Elementare Funktionen	8
4.1 innere Verknüpfungen	5	9 Folgen	7	14.1 Landau-Symbole	8
4.2 Anordnung	5	9.1 Beschränktheit	7	15 Differenzialrechnung einer Variablen in \mathbb{R}	9
4.3 Beschränktheit	5	9.2 Häufungspunkt	7	15.1 Definition	9
4.4 Maximum (Minimum analog)	5	9.3 Satz von Bolzano-Weierstrass	7	15.2 Definition mit Fehlerterm	9
4.5 Supremum (Infimum analog)	5	9.4 Rechnen mit Grenzwerten	7	15.3 Stetigkeit	9
4.6 Vollständigkeitsaxiom in \mathbb{R}	5	9.5 Leibniz-Kriterium	7	15.4 Umkehrfunktion	9
4.7 Dichte von \mathbb{Q} und \mathbb{R}	5	9.6 „Quetsch“-Lemma	7	15.5 Mittelwertsatz der DR	9
5 Vollständige Induktion	5	9.7 Eulersche Zahl e	7	15.6 Taylorpolynom von $f(x)$ in x_0	9
5.1 Bernoullische Ungleichung	5	9.8 Cauchy-Folge	7	15.7 Extrempunkte, Wendepunkte	9
5.2 Geometrische Reihe	5	10 Reihen	7	15.8 Potenzreihen	9
5.3 Binomialkoeffizienten	5	10.1 Absolute Konvergenz	7	15.9 Regel von L'Hospital	9
6 Beiträge	5	10.2 Majorantenkriterium	7	15.10 Fixpunktsatz von Banach	9
6.1 Dreiecksungleichung	5	10.3 Cauchy-Produkt	7		
6.2 Umgebung	5	10.4 Wurzel-/ Quotientenkriterium	7		
		11 Exponentialfunktion	8		

16 Integralrechnung einer Variablen in \mathbb{R}	9	18.3 2π -Periodische Funktionen	12	19.28Quadrik (Kegelschnitte)	14
16.1 Definition	9	18.4 Skalarprodukt auf V	12	19.29Transformation (Quadrik)	14
16.2 Integrierbarkeit	9	18.5 Norm auf V	12	19.30Formen (Quadrik)	15
16.3 Zerlegungen	9	18.6 Gleichmäßige Konvergenz	12		
16.4 Mittelwertsatz der IR	10	18.7 Fourierreihen	12	20 DR mehrerer Variablen	15
16.5 Partielle Integration	10	18.8 Besselsche Ungleichung	12	20.1 offenen Gebiete	15
16.6 Gebrochen rationale Funktion	10	18.9 Identitätssatz	12	20.2 Stetigkeit, Diff'bar	15
16.7 Potenzreihen	10	18.10Punktweise Konvergenz der Fourierreihe	12	20.3 Kurven	15
16.8 Uneigentliche Integrale	10			20.4 Bogenlänge	15
16.9 Majorantenkriterium	10	19 Lineare Algebra	12	20.5 Richtungsableitung	15
		19.1 Schreibweisen	12	20.6 partielle Ableitung	15
17 DGL	10	19.2 Gruppen	12	20.7 Jakobi- / Funktionalmatrix J	15
17.1 Lineare DGL 1. Ordnung	10	19.3 Basis vom VR V	12	20.8 Schwarzsche Satz	15
17.2 Trennung der Variablen (TdV)	10	19.4 Dimension	13	20.9 Nabla-Identitäten	15
17.3 Ähnlichkeits-DGL	10	19.5 Standardbasis	13	20.10Ableitung	15
17.4 Existenz und Eindeutigkeit	10	19.6 Cauchy-Schwarz Ungleichung	13	20.11Stetig vs. Diff'bar	16
17.5 Picard-Iteration	10	19.7 Lineare Abbildungen	13	20.12Tangentialebenen	16
17.6 Implizite DGL 1. Ordnung	10	19.8 Isomorphismus	13	20.13Taylorformel	16
17.7 Implizite DGL 2. Ordnung	10	19.9 Matrizen (Schreibweisen)	13	20.14Hesse-Matrix	16
17.8 Exakte DGL	10	19.10Rang einer Matrix	13	20.15Identitätssatz	16
17.9 Integrierender Faktor	11	19.11Lineare Gleichungssysteme	13	20.16stationäre Punkte	16
17.10Bernoulli-DGL	11	19.12Transpositionen	13	20.17Extrempunkte, Sattelpunkte	16
17.11Eulersche DGL	11	19.13Permutationen	13	20.18lokale Invertierbarkeit	16
17.12Riccati-DGL	11	19.14Eigenschaften der Determinate	13	20.19implizite Funktionen	16
17.13Lineare DGL 2. Ordnung	11	19.15Definition der Determinate	13		
17.14Fundamentalsystem	11	19.16Laplacescher Entwicklungssatz	13	21 IR mehrerer Variablen	16
17.15Wronski-Determinante	11	19.17Rechnen mit Determinaten	13	21.1 Einführung	16
17.16Potenzreihenansatz	11	19.18Adjunkte (\neq Adjungierte)	13	21.2 Vertauschung der Integrationsreihenfolge	16
17.17Abgewandelter Potenzreihenansatz	11	19.19Gramersche Regel	14	21.3 Gaußscher Satz in der Ebene	16
17.18Lemma von Cronwall	11	19.20Orthogonale Matrizen	14	21.4 Stokesscher Integralsatz in der Ebene	17
17.19System von DGL erster Ordnung	11	19.21Eigenwert (Definition)	14	21.5 1. Green'sche Formel	17
17.20Systeme linearer homogener DGL	11	19.22Eigenraum	14	21.6 2. Green'sche Formel	17
17.21Stabilität	12	19.23Der Eigenwert 0	14	21.7 Potentialfelder	17
		19.24Ähnliche Matrizen	14	21.8 einfach zusammenhängend	17
18 Fourierreihen	12	19.25Diagonalisierbar	14	21.9 2. Hauptsatz für Kurvenintegrale	17
18.1 periodische Funktionen	12	19.26Hermitsche Matrizen	14	21.10Normalenvektor	17
18.2 Trigonometrische Polynome	12	19.27Definitheit von Matrizen	14	21.11Oberflächenintegrale im \mathbb{R}^3	17

21.12	mehrdimensionale Variablentransformation . . .	17
21.13	Stokesscher Integralsatz	17
21.14	Gaußscher Integralsatz	17
22	Funktionentheorie	17
22.1	Stetigkeit	17
22.2	Komplex diff'bar	17
22.3	holomorph	17
22.4	holomorphe Ableitung	18
22.5	Cauchy-Riemann DGL	18
22.6	Harmonisch	18
22.7	Holomorphe Ergänzung	18
22.8	Jacobimatrix	18
22.9	Schlicht	18
22.10	Flächeninhalt	18
22.11	Flächen	18
22.12	Argument	18
22.13	Natürlicher Logarithmus	18
22.14	Rechnen	18
22.15	Verallgemeinerte Kreise	18
22.16	Stereographische Projektion	18
22.17	Konforme Abbildungen	18
22.18	Möbiustransformation	19
22.19	Kurvenintegrale	19
22.20	Cauchy Integralsatz	19
22.21	Cauchysche Integralformel	19
22.22	Potenzreihenentwicklung	19
22.23	Laurentreihe	19
22.24	Konvergenz der Laurentreihe	19
22.25	Singularitäten	19
22.26	Residuum	19
22.27	Bestimmung von Residuen	19
22.28	Residuensatz	19
	Stichwortverzeichnis	20

0 Schreibweisen

c_\clubsuit : const.

$\exists! x$: Es existiert genau ein x

0.1 Intervalle

$$]a, b[:= (a, b) := \{x \mid a < x < b\}$$

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$$

Die Notationen können an den Rändern gemischt werden.

0.2 Matrizen

A_{ij} meint die i -Zeile und die j -Spalte der Matrix A .

Ebenso meint $A \in \mathbb{R}^{(m,n)} = \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten.

1 Aussagenlogik

Eine *Aussage* ist ein Satz, der entweder wahr oder falsch ist.

1.1 Symbole

Negation: \neg Äquivalenz: \leftrightarrow Konjunktion (und): \wedge

Implikation (wenn..., dann): \rightarrow Disjunktion (oder): \vee

1.2 De Morgan'schen Gesetze

$$\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b \quad \text{oder} \quad \overline{(a \wedge b)} = \bar{a} \vee \bar{b}$$

$$\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b \quad \text{oder} \quad \overline{(a \vee b)} = \bar{a} \wedge \bar{b}$$

2 Mengen

Für jede Menge M und jedes Objekt x gilt

$$x \in M \quad (\text{exklusives}) \quad \text{oder} \quad x \notin M$$

2.1 Russellsche Antinomie

Klasse aller Klassen, die sich nicht selbst als Element enthalten: $R := \{x \mid x \notin x\}$ R ist in sich widersprüchlich

2.2 Symbole

Inklusion: $U \subset O$ U ist Teilmenge von O .

(transitiv, reflexiv, *nicht symmetrisch*)

Differenz: $M \setminus N := M \cap \bar{N}$

Komplement: $\complement_O U := O \setminus U$ ($U \subset O$)

Disjunktive Vereinigung: $M \triangle N := (M \cup N) \setminus (M \cap N)$

Symmetrische Differenz

$$\left(M_1 = M_2 \right) \stackrel{\text{Def}}{\iff} \left((M_1 \subset M_2) \wedge (M_2 \subset M_1) \right)$$

Potenzmenge $\mathcal{P}(M) :=$ Menge aller Teilmengen von M

2.3 De Morgan'sche Gesetze

Für jede beliebige endliche, abzählbare oder auch nicht abzählbare Indexmenge I :

$$\overline{\bigcap_{i \in I} M_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{M_i} \quad \text{und} \quad \overline{\bigcup_{i \in I} M_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{M_i}$$

2.4 Leere Menge \emptyset

Axiomatisch: $x \in \emptyset$ ist stets falsch
 $\emptyset \subset M$ ist stets wahr

3 Funktionen/Abbildungen

Eine Vorschrift f , die jedem Element $x \in X$ genau ein Element $y \in Y$ zuordnet, heißt Funktion/Abbildung von X nach Y .
 (X, Y : Mengen)

$$f : X \rightarrow Y \quad \text{graph}(f) := \{(x, y) \in (X \times Y) \mid y = f(x)\}$$

3.1 Gleichheit von Funktionen

Die Funktion $f : X \rightarrow Y$, $g : U \rightarrow V$ sind gleich, falls

$$X = U \quad \text{und} \quad f(x) = g(x) \quad \forall x \in X$$

Umkehrfunktion f^{-1} : $f^{-1} \circ f = \text{id} = f \circ f^{-1}$

$$(f^{-1})^{-1} = f \quad (f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

3.2 Surjektivität und Injektivität

$f : X \rightarrow Y$ heißt...

... *surjektiv*, falls $\text{Bild}(f) = Y$

... *injektiv*, falls aus $f(x_1) = f(x_2)$ folgt $x_1 = x_2$

... *bijektiv*, falls f surjektiv und injektiv ist

f ist bijektiv $\iff f^{-1}$ ist bijektiv

3.3 Monotonie

f heißt streng monoton wachsend \uparrow , falls

$$\text{aus } x_1 < x_2 \quad \text{folgt} \quad f(x_1) < f(x_2)$$

$$f \uparrow \iff f^{-1} \uparrow \quad f \downarrow \iff f^{-1} \downarrow$$

Analog für monoton fallend \downarrow :

Weglassen von *streng* $\Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

4 Reelle Zahlen

Die Menge \mathbb{R} heißt die Menge der reellen Zahlen, falls folgendes gilt:

4.1 innere Verknüpfungen

Es gibt zwei innere Verknüpfungen $(+, \cdot)$ mit

$(\mathbb{R}, +)$: abelsche Gruppe mit neutralem Element 0 und inversem Element $\text{inv}(a) = -a$

$(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$: abelsche Gruppe mit neutralem Element 1 und inversem Element $\text{inv}(a) = a^{-1} = \frac{1}{a}$

Und es gilt das Distributivgesetz: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

$$\Rightarrow (\mathbb{R}, +, \cdot) \text{ ist ein Körper}$$

4.2 Anordnung

- $\forall a \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der folgenden Aussagen:

$$a > 0 \quad -a > 0 \quad a = 0$$

- Aus $a > 0, b > 0$ folgt $(a + b) > 0$ und $(a \cdot b) > 0$

4.3 Beschränktheit

- Eine Menge M heißt nach oben (unten) beschränkt, wenn ein Schranke S existiert, für das gilt:

$$x \leq S \quad \forall x \in M \quad (x \geq S)$$

- Eine Menge heißt beschränkt, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist.
- Eine Funktion heißt beschränkt, wenn ihr Bild beschränkt ist.

4.4 Maximum (Minimum analog)

m ist Maximum von $M \iff (m \in M) \wedge (x \leq m \quad \forall x \in M)$

$$\min(M) = -\max(-M)$$

4.5 Supremum (Infinium analog)

Das Supremum einer Menge ist die kleinste obere Schranke:

$$M \leq \sup(M) \quad M \leq s \Rightarrow \sup(M) \leq s \quad \forall s$$

$$\inf(M) = -\sup(-M)$$

4.6 Vollständigkeitsaxiom in \mathbb{R}

Jede nichtleere nach oben beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}$ besitzt ein Supremum.

Dies gilt *nicht* in \mathbb{Q} .

$$M = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0, x^2 < 2\} \quad \sup(M) = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

4.7 Dichte von \mathbb{Q} und \mathbb{R}

$$x, y \in \mathbb{R} \text{ mit } x < y$$

$$\Rightarrow \exists q \in \mathbb{Q} \text{ mit } x < q < y \quad \exists r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ mit } x < r < y$$

5 Vollständige Induktion

$M \subset \mathbb{R}$ heißt induktiv $\iff (1 \in M) \wedge (x \in M \rightarrow x + 1 \in M)$

$$\bigcap_{\substack{M \text{ ist} \\ \text{induktiv}}} M = \mathbb{N}$$

5.1 Bernoullische Ungleichung

Vorraussetzung: $x \geq -1 \quad n \in \mathbb{N}$

$$(1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x$$

5.2 Geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad q \neq 1$$

5.3 Binomialkoeffizienten

$$n \in \mathbb{N} \quad k \in \mathbb{N}_0 \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \quad k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$$

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k} \quad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\overbrace{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}^{k \text{ Terme}}}{k!} \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

6 Beträge

6.1 Dreiecksungleichung

$$0 \leq ||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$$

$$x, y \in \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$$

6.2 Umgebung

$$U_\varepsilon(a) := \{x \mid |x - a| < \varepsilon\} \quad \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow U_\varepsilon(a) = \{x \mid a - \varepsilon \leq x \leq a + \varepsilon\}$$

6.3 GAM-Ungleichung

$$\bar{x}_{\text{geom}} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}_{\text{arithm}}$$

6.4 Schwarz'sche Ungleichung

$$\sum_i |x_i \cdot y_i| \leq \sqrt{\sum_i x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_i y_i^2} \quad a_i, b_i \in \mathbb{R}$$

Für ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$:

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$$

7 Komplexe Zahlen \mathbb{C}

Einführung: i als eine Lösung der Gleichung $x^2 + 1 = 0$.
Die Körperaxiome aus \mathbb{R} werden dadurch nicht verletzt.

Komplex konjugiert: $\bar{z} = z^* = \text{Re}(z) - \text{Im}(z)$

7.1 Binomische Formel

$$|w \pm z|^2 = |w|^2 \pm 2\text{Re}(z\bar{w}) + |z|^2$$

Betrag einer komplexen Zahl: $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

7.2 Polardarstellung

$$z = r \cdot e^{i\varphi} = r \cdot (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$$

Betrag r Argument φ

7.3 Wurzel

$$(n \in \mathbb{N}) : \sqrt[n]{r \cdot e^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \frac{1}{n}(\varphi + 2k\pi)} \quad k = 0, \dots, n-1$$

7.4 Fundamentalsatz der Algebra

Jedes komplexe nicht konstante Polynom besitzt eine komplexe Nullstelle.

7.5 (Un-)Ordnung in \mathbb{C}

Der Körper \mathbb{C} ist nicht geordnet. D.h. es gibt keine Ungleichungsrelation $<$ bzw. $>$ wie im Körper \mathbb{R} .

8 Vektorrechnung

8.1 Vektorraum

V heißt komplexer (reeller) Vektorraum (VR), wenn:

1. \exists Verknüpfung „+“ : $(V, +)$ ist abelsche Gruppe
2. \exists assoziative, distributive Vorschrift „ \cdot “ :
 $\alpha \cdot x$ ist eindeutig und $1 \cdot x = x \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}(\mathbb{R}), x \in V$

Die Lösungsmenge von lineare homogenen Gleichungssystemen sind reelle Vektorräume:

$$0 = A\vec{x} \quad \text{oder auch:} \quad \vec{y}' = A(x)\vec{y}$$

8.2 Norm

V sei ein \mathbb{K} -VK. $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ heißt Norm, wenn

1. $\|x\| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ (positive Definitheit)
2. $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ (Homogenität)
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (die Dreiecksungleichung)

$$\forall x, y \in V \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}$$

Ein VR mit einer Norm heißt normierter (Vektor-)Raum.

8.3 Skalarprodukt

Ein komplexes Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ eines VR V ist durch folgende Axiome festgelegt:

- $\langle \lambda u + v, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$
- $\langle u, w \rangle = \overline{\langle w, u \rangle} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall u, v, w \in V$

- $\langle u, u \rangle > 0$ für $u \neq 0$

Ein komplexer (reeller) VR mit Skalarprodukt heißt unitär (euklidisch). Für ein reelles Skalarprodukt entfällt die komplexe Konjugation, woraus sich eine Symmetriebedingung ergibt.

8.4 orthogonale Projektion

$$P_{\vec{x}}(\vec{y}) := \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\|^2} \cdot \vec{x}$$

heißt *orthogonale Projektion* von \vec{y} auf die Richtung \vec{x}

Projiziert man auf Ebenen, so müssen die Richtungsvektoren der Ebene bereits orthogonal zu einander sein.

8.5 Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren

Aus den Vektoren \vec{a}_i kann man orthogonale Vektoren \vec{b}_i gewinnen:

$$\vec{b}_1 = \vec{a}_1$$

$$\vec{b}_n = \vec{a}_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle \vec{a}_n, \vec{b}_i \rangle}{\langle \vec{b}_i, \vec{b}_i \rangle} \vec{b}_i$$

8.6 Hesse Normalform

\vec{r} beschreibe Punkte einer Ebene E

$$\vec{r} \cdot \vec{n}_0 - d = 0 \quad d \geq 0$$

Mit dem normierten Normalenvektor \vec{n}_0 von E , welcher vom Koordinatenursprung zur Ebene zeigt.

Setzt man einen beliebigen Punkt in \vec{r} ein, so erhält man seinen Abstand zur Ebene.

8.7 Vektoridentitäten

Graßmann-Identität (bac-cab):

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

Jacobi-Identität:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$$

Lagrange-Identität:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{b} \cdot \vec{c})(\vec{a} \cdot \vec{d})$$

9 Folgen

9.1 Beschränktheit

Eine komplexe Folge a_n heißt beschränkt

$$\Leftrightarrow \exists S \in \mathbb{R} : |a_n| \leq S \quad \forall n$$

9.2 Häufungspunkt

$c \in \mathbb{C}$ heißt Häufungspunkt, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ für unendliche viele $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|a_n - c| < \varepsilon$$

Unbeschränkte Folgen besitzen den Häufungspunkt $(\pm)\infty$

9.3 Satz von Bolzano-Weierstrass

Jede komplexe Folge besitzt einen Häufungspunkt!

Nur 1 Häufungspunkt \Rightarrow Grenzwert (Folge ist konvergent)

Eine monotone beschränkte Folge ist konvergent

9.4 Rechnen mit Grenzwerten

Die 2 Folgen a_n, b_n konvergieren gegen a, b . Dann gilt:

$$a_n \pm b_n \rightarrow a \pm b \quad a_n \cdot b_n \rightarrow a \cdot b$$

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b} \quad (b \neq 0) \quad f(a_n) \rightarrow f(a) \quad f \text{ stetig}$$

9.5 Leibniz-Kriterium

Vorr.: $a_n > 0$ a_n monoton fallend $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \text{ ist konvergent}$$

Allgemein: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

9.6 „Quetsch“-Lemma

Die Folgen a_n/b_n seien monoton wachsend/fallend

$$\text{mit } a_n \leq b_n \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n - a_n = 0$$

$\Rightarrow \exists! x \in \mathbb{R}$ mit $a_n \leq x \leq b_n \forall n$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

9.7 Eulersche Zahl e

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

9.8 Cauchy-Folge

Eine Folge a_n heißt Cauchyfolge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index N gibt, so dass ab diesem Index alle Folgenglieder weniger als ε voneinander entfernt sind:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq N : |a_m - a_n| < \varepsilon$$

In vollständigen Räumen konvergieren alle Cauchyfolgen.
Konvergiert eine Folge, so ist es eine Cauchyfolge.

10 Reihen

Für Reihen gilt sinngemäß der Satz über Cauchy-Folge (9.8) und das Rechnen mit Grenzwerten (9.4).

10.1 Absolute Konvergenz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ absolut konvergent} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ konvergiert}$$

Diese Reihen sind unempfindlich gegen Umordnung.

(I.A. gilt weder das Kommutativ- noch das Assoziativgesetz bei Reihen)

10.2 Majorantenkriterium

$$|a_n| \leq c_n \forall n \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{ ist konvergent}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ist absolut konvergent}$$

Minorantenkriterium analog für Divergenz.

10.3 Cauchy-Produkt

Das Cauchy-Produkt zweier absolut konvergenten Reihen konvergiert absolut:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

Der Grenzwert des Cauchyprodukts ist gleich dem Produkt der Grenzwerte. Ist nur eine der Reihen absolut konvergent, konvergiert das Produkt i.A. nicht mehr absolut. Konvergieren beide Reihen nicht absolut, so muss das Produkt nicht konvergieren.

10.4 Wurzel-/ Quotientenkriterium

Man betrachte die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ als Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ und untersuche, ob diese Potenzreihe für $x = 1$ konvergiert. (vgl. Konvergenzradius: 13.4)

11 Exponentialfunktion

$$\boxed{\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}} \text{ konvergiert absolut } \forall z \in \mathbb{C}$$

exp ist stetig in jeden $z \in \mathbb{C}$.

12 Stetigkeit

12.1 Grenzwerte bei Funktionen

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \text{ für bel. Folge mit } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

Ist dies nicht eindeutig, existiert der Grenzwert nicht!

12.2 Stetigkeit

f heißt stetig in a , falls $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

f heißt stetig in einem Intervall I , falls f stetig in $a \forall a \in I$.

f, g stetig $\Rightarrow f + g, f \cdot g, \lambda f, \frac{f}{g} (g \neq 0), f \circ g$ stetig $\lambda = c$.
Der Vektorraum der k -mal stetig differenzierbaren Funktionen auf dem Intervall I heißt $\mathcal{C}^k(I)$.

12.3 ε - δ -Definition

f ist in a stetig, genau dann wenn:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : (|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)}$$

12.4 Umkehrfunktionen

f stetig $\Rightarrow f^{-1}$ stetig (sofern f^{-1} existiert)

12.5 Zwischenwertsatz

$$f \in \mathcal{C}^0([a, b]) \quad c \in [f(a), f(b)] \\ \Rightarrow x_0 \in [a, b] \text{ mit } f(x_0) = c$$

12.6 Beschränktheit

Auf einem geschlossenen beschränkten Intervall ist jede stetige Funktion beschränkt und besitzt Maxi- und Minimum.

13 Funktionenfolgen

13.1 Punktweise Konvergenz

Eine Funktionenfolge f_n konvergiert punktweise in z , falls die Grenzfunktion $\boxed{f(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)}$ konvergiert.

Sie konvergiert punktweise in einem Intervall I , falls sie für alle $z \in I$ konvergiert.

13.2 Gleichmäßige Konvergenz

f_n konvergiert gleichmäßig auf I gegen f , falls

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{\infty} = 0}$$

$$\|f_1 - f_2\|_{\infty} := \sup (|f_1(x) - f_2(x)|) \quad x \in I$$

13.3 Majorantenkriterium

$$|f_n(z)| \leq c_n \forall n, \forall z \in I \text{ und } \sum_n c_n \text{ ist konvergent}$$

$$\Rightarrow \sum_n f_j(z) \text{ konvergiert gleichmäßig auf } I$$

13.4 Konvergenzradius r

Konv.-radius r einer Potenzreihe $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$.

$r = 0$: P konvergiert nur in $z = z_0$

$r > 0$ ($r = \infty$): P konvergiert absolut für $|z - z_0| < r$
 P konvergiert gleichmäßig für $|z - z_0| \leq \rho$ (mit $\rho < r$)
 P divergiert für $|z - z_0| > r$

Für $|z - z_0| = r$ kann nur die Aussage gemacht werden, dass bis dort Konvergenz und ab dort Divergenz herrscht!

13.5 Wurzelkriterium

$$\boxed{r = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}} \quad \frac{1}{\infty} = 0 \quad \frac{1}{0} = \infty$$

13.6 Quotientenkriterium

$$\boxed{r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|}$$

Achtung: $a_n \neq 0 \forall n$ und Grenzwert muss eindeutig sein

13.7 „Geometrisches Kriterium“

Schreibt man eine Funktion in die Form $\frac{1}{1-x}$ und entwickelt über die geometrische Reihe die Potenzreihe, so erhält man den Konvergenzradius aus $|x| < 1$.

13.8 Identitätssatz

Sind die Potenzreihen von f und g gleich, so sind auch f und g gleich. (Und umgekehrt!)

14 Elementare Funktionen

14.1 Landau-Symbole

$$f(x) = o(g(x)) \text{ für } x \rightarrow x_0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$f(x) = O(g(x)) \text{ für } x \rightarrow x_0 \iff \limsup_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \infty$$

15 Differenzialrechnung einer Variablen in \mathbb{R}

15.1 Definition

f heißt in x_0 diff'bar, falls der folgende Grenzwert existiert:

$$f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

15.2 Definition mit Fehlerterm

f ist in x_0 diff'bar $\Leftrightarrow \exists r$ stetig in x_0 mit $r(x_0) = 0$

$$f(x) = f(x_0) + L(x - x_0) + r(x)(x - x_0) \quad \forall x$$

L ist dann die Ableitung in x_0 ($L = c_\bullet$)

15.3 Stetigkeit

Ist f diff'bar, so ist f stetig. (Die Umkehrung ist falsch!)

15.4 Umkehrfunktion

f ist stetig, bijektiv $\Rightarrow \exists g := f^{-1}$

$$g'(x_0) = \frac{1}{f'(g(x_0))} \quad \text{falls } f' \neq 0 \text{ dort existiert}$$

15.5 Mittelwertsatz der DR

$g, f \in C^0([a, b])$ und innerhalb diff'bar $\Rightarrow \exists x_0 \in (a, b)$:

$$\left[f(b) - f(a) \right] g'(x_0) = f'(x_0) \left[g(b) - g(a) \right]$$

für $g(x) = x$:
$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

15.6 Taylorpolynom von $f(x)$ in x_0

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) (x - x_0)^k$$

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x - x_0) \quad f(x_0 + h) = T_n(x_0 + h) + R_n(h)$$

$$\Rightarrow \exists \vartheta \in (0, 1) : R_n(h) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta h) \cdot h^{n+1}$$

15.7 Extrempunkte, Wendepunkte

Ist $f^{(n)}(x_0)$ die erste nicht-verschwindende

Ableitung in x_0 mit $n \geq 2$, so liegt bei n gerade ungerade

im Punkt x_0 ein Extrempunkt Wendepunkt vor.

15.8 Potenzreihen

Ableitungen von absolut konvergenten Reihen können gliedweise gebildet werden. (Insbesondere alle Potenzreihen innerhalb des Konvergenzradius.)

15.9 Regel von L'Hospital

Gilt $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ und $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$

$$\text{so folgt } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls der Grenzwert auf der rechten Seite existiert.

15.10 Fixpunktsatz von Banach

$$I = [a, b] \quad f : I \rightarrow I \quad f \in C(I)$$

und $\exists q : 0 < q < 1$ mit $|f'(x)| \leq q \quad \forall x \in [a, b]$

Dann gilt:

(q wird Lipschitz-Konstante genannt)

- $\exists! \xi \in [a, b] : f(\xi) = \xi$
- Die Folge $x_0 \in I, x_{n+1} = f(x_n)$ konvergiert gegen ξ .
- Es gilt die Fehlerabschätzung:

$$|\xi - x_n| \leq \underbrace{\frac{q}{1-q} |x_n - x_{n-1}|}_{\text{aposteriori}} \leq \underbrace{\frac{q^n}{1-q} |x_1 - x_0|}_{\text{apriori}}$$

16 Integralrechnung einer Variablen in \mathbb{R}

16.1 Definition

Wenn Unter- und Obersummen über $[a, b]$ gegen denselben Wert s konvergieren, so existiert das Integral $s =: \int_a^b f(x) dx$

16.2 Integrierbarkeit

f monoton oder stetig auf $[a, b] \Leftrightarrow$ das Integral $\int_a^b f$ existiert

16.3 Zerlegungen

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \frac{b-a}{n}$$

16.4 Mittelwertsatz der IR

$g, f \in C^0([a, b]) \quad f(x) \geq 0 \quad a \leq x \leq b \quad \Rightarrow \exists \xi \in (a, b) :$

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(\xi) \int_a^b f(x)dx$$

für $f(x) = 1$:
$$\int_a^b g(x)dx = g(\xi)(b - a)$$

16.5 Partielle Integration

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx$$

16.6 Gebrochen rationale Funktion

Gesucht ist die Stammfunktion von $\frac{f(x)}{g(x)}$

grad(f) ≥ grad(g): Führe Polynomdivision mit Rest durch

grad(f) < grad(g): Berechne alle Nullstellen x_i samt deren Vielfachheiten n_i von $g(x)$.

\Rightarrow Partialbruchzerlegung:
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_i \left(\sum_{k=1}^{n_i} \frac{c_{i,k}}{(x - x_i)^k} \right)$$

\Rightarrow gliedweises Integrieren der Zerlegung:

16.7 Potenzreihen

Integrale von absolut konvergenten Reihen können gliedweise gebildet werden. (Insbesondere alle Potenzreihen innerhalb des Konvergenzradius.)

16.8 Uneigentliche Integrale

f definiert auf $[a, b)$:
$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\beta \rightarrow b^-} \int_a^\beta f(x)dx$$

f def. $[a, b] \setminus \{\gamma\}$:
$$\int_a^b f(x)dx := \int_a^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^b f(x)dx$$

16.9 Majorantenkriterium

Majoranten- und Minorantenkriterium analog zu Folgen und Funktionenreihen.

17 DGL

17.1 Lineare DGL 1. Ordnung

$$y' + a(x)y = r(x) \quad A := \int a(x)dx$$

$$y_h = c \cdot \exp(-A) \quad y_s = \exp(-A) \cdot \int r(x) \cdot \exp(+A)dx$$

17.2 Trennung der Variablen (TdV)

$$y' = f(x)g(y)$$

Das AWP ist eindeutig lösbar, falls $g(y) \neq 0 \forall y$ im Intervall.

$$g(y_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad y(x) = y_i = c_\bullet \quad \text{ist Lösung}$$

17.3 Ähnlichkeits-DGL

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Substitution mit $u = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad y' = x \cdot u' + u = f(u)$

17.4 Existenz und Eindeutigkeit

$$y' = f(x, y) \quad y(x_0) = y_0$$

$f : D \rightarrow \mathbb{R} \quad D_{\text{offen}} \subseteq \mathbb{R}^2 \quad (x_0, y_0) \in D$

Peano: f stetig in $D \Rightarrow$ AWP lösbar

Picard-Lindelöf: f und $\partial_y f$ stetig \Rightarrow AWP eindeutig lösbar

17.5 Picard-Iteration

Zusätzlich zu Picard-Lindelöf: $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig diff'bar und $x_0, x \in I$ (Mit Indizes: Iterationsformel; Ohne: Fixpunktgleichung)

$$y \text{ ist AWP-Lösung} \Leftrightarrow y_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, y_k(\xi))d\xi$$

Iteration ergibt zumindest auf Teilintervall eine Lösung

17.6 Implizite DGL 1. Ordnung

$$F(x, y, y') = 0$$

1. Prüfe, ob $y'' = 0$ Lösung ist. ($y = ax + b$)
2. $y'' \neq 0$: Substituiere $y = \chi(t); x = \Psi(t); y' = t$ mit Zusatzgl. $\dot{\chi}(t) = t \cdot \dot{\Psi}(t)$
($\dot{\Psi}(t) \neq 0 \Rightarrow$ Lösung ist eine Funktion $y(x)$)

17.7 Implizite DGL 2. Ordnung

$$\Phi(y, y', y'') = 0$$

1. Berechne $p(t)$ aus $\Phi(t, p(t), p(t)\dot{p}(t)) = 0$ wie in 17.6 (Anfangswerte können schon bei $p(t)$ berücksichtigt werden)
2. Berechne $y(x)$ aus $y'(x) = p(y(x))$ mit TdV

17.8 Exakte DGL

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

Die DGL heißt exakt, falls $P_y = Q_x$

Lösung über $F(x, y) = c_\bullet$ mit $F_x = P; F_y = Q; [F_t = 0]$

17.9 Integrierender Faktor

auch: Eulersche Multiplikator; nützlich, um 17.8 exakt zu machen

$$\mu = \mu(x) \Rightarrow \mu'(x) = \underbrace{\frac{P_y - Q_x}{Q}}_{\text{wenn: } a(x)} \mu(x)$$

$$\mu = \mu(y) \Rightarrow \mu'(y) = \underbrace{\frac{Q_x - P_y}{P}}_{\text{wenn: } b(x)} \mu(y)$$

$$\mu = \mu(\varphi(x, y)) \Rightarrow \mu'(\varphi) = \underbrace{\frac{Q_x - P_y}{\varphi_y P - \varphi_x Q}}_{\text{wenn: } h(\varphi(x, y))} \mu(\varphi)$$

17.10 Bernoulli-DGL

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha$$

$$\text{Integrierender Faktor } \mu(x) = \exp \int^x p(t)dt$$

Und erkennen, dass links dann $(\mu(x)y(x))'$ steht.**17.11 Eulersche DGL**

$$x^2 y'' + axy' + by = f(x) \quad a, b = c_\bullet \quad (x \ll 0)$$

$$\text{Substitution mit } x = \pm e^t \quad u(t) = y(x)$$

$$\Rightarrow xy' = \dot{u} \quad x^2 y'' = \ddot{u} - \dot{u}$$

17.12 Riccati-DGL

$$y' + f(x)y = r(x) + g(x)y^2 \quad \text{mit bekannter Lösung } v(x)$$

$$\text{Substitution mit } y = v + \frac{1}{u} \quad y' = v' - \frac{u'}{u^2}$$

$$\text{ergibt lineare DGL: } \boxed{u' + (2vg - f)u = -g}$$

17.13 Lineare DGL 2. Ordnung

$$\boxed{y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x)}$$

 $y_1(x)$ ist Lösung der homogenen Gleichung. $\Rightarrow y_2(x) = v(x) \cdot y_1(x)$ ist spezielle Lösung falls

$$\boxed{v''(x) + v'(x) \left(\frac{2y_1'(x)}{y_1(x)} + p(x) \right) = \frac{f(x)}{y_1(x)}}$$

Der Lösungsraum $\mathcal{L}_{\text{homogen}} = \mathcal{L}_0$ ist ein reeller Vektorraum der Dimension 2.**17.14 Fundamentalsystem**Eine Basis von \mathcal{L}_0 heißt Fundamentalsystem.**17.15 Wronski-Determinante**

$$\boxed{w(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}} \quad \text{ist Wronski-Determinante}$$

Mit $y_1, y_2 \in \mathcal{L}_0 \Rightarrow w'(x) = -p(x)w(x)$.**17.16 Potenzreihenansatz**

$$\boxed{y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j (x - x_0)^j}$$

17.17 Abgewandelter Potenzreihenansatz

$$\boxed{y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j (x - x_0)^{j+\rho}} \quad c_0 \neq 0 \quad \rho \in \mathbb{R}$$

Bietet sich an, wenn die Koeffizienten singularär in x_0 sind.**17.18 Lemma von Cronwall**

$$\varphi : [0, T > 0] \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig} \quad \alpha \in \mathbb{R}, \beta \geq 0$$

$$\text{Es gelte: } \varphi(t) \leq \alpha + \beta \int_0^t \varphi(s)ds \quad \forall t \in [0, T]$$

$$\Rightarrow \text{Dann gilt: } \varphi(t) \leq \alpha \cdot e^{\beta t}$$

17.19 System von DGL erster Ordnung

$$\boxed{\vec{y}' = \vec{F}(x, \vec{y})}$$

Die Sätze von Picard-Lindelöf, Peano, Picard-Iteration etc. gelten entsprechend.

Lineare DGL höhere Ordnung lassen sich immer auf System erster Ordnung zurückführen.

 \Rightarrow Lineare DGL 2. Ordnung ist als AWP eindeutig lösbar.**17.20 Systeme linearer homogener DGL**

$$\boxed{\vec{y}' = A(x)\vec{y}} \quad \vec{y} \in \mathbb{R}^n \quad A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$$

Die Lösungsmenge \mathcal{L}_0 ist n -dimensionaler reeller Vektorraum.Gibt es Basis v_k des \mathbb{R}^n aus EV von A mit den EW $\lambda_k \in \mathbb{R}$, so ist ein Fundamentalsystem gegeben durch:

$$y_k(x) = v_k e^{\lambda_k x} \quad k = 1, \dots, n$$

Ist ein Eigenwerte λ komplex (und damit gibt es auch den komplex konjugierten Eigenwerte $\bar{\lambda}$), so sind $\text{Re}(ve^{\lambda x})$ und $\text{Im}(ve^{\lambda x})$ linear unabhängige Lösungen.

Im allgemein Fall gibt es ein FS, bestehend aus Funktionen

$$\text{Re}(e^{\lambda_j x} p_j(x)) \quad \text{Im}(e^{\lambda_j x} p_j(x))$$

wobei p_j ein geeignetes Polynom in x mit komplexen Koeffizienten ist.

17.21 Stabilität

↔ S. 140/141 (Meyberg/Vachenauer HM2)

18 Fourierreihen**18.1 periodische Funktionen**

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt p periodisch, falls $f(x+p) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$.

18.2 Trigonometrische Polynome

$$T_N(t) = \sum_{k=-N}^N c_k \underbrace{e^{ikt}}_{=: e_k(t)} \quad N \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}, c_k \in \mathbb{C}$$

heißt trigonometrisches Polynom des Grades N .
(Trigonometrische Reihe für $N \rightarrow \infty$)

$$\begin{aligned} T_N(t) &= \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikt} = c_0 + \sum_{k=1}^N (c_k e^{ikt} + c_{-k} e^{-ikt}) \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^N ((c_k + c_{-k}) \cos kt + i(c_k - c_{-k}) \sin kt) \end{aligned}$$

$$T_n(t) \in \mathbb{R} \leftrightarrow c_k = \bar{c}_{-k} \forall k$$

18.3 2π -Periodische Funktionen

V sei die Menge der 2π -periodischen beschränkten Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, die im Periodenintervall $[-\pi, \pi]$ höchstens endlich viele Unstetigkeiten 1. Art (=endlicher Sprung) haben.

V ist ein komplexer Vektorraum, dessen Elemente alle integrierbar sind.

18.4 Skalarprodukt auf V

$$f, g \in V \quad \langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt$$

Damit ist V ein unitärer Vektorraum.

$$\langle e_k, e_j \rangle = \delta_{kj} \Rightarrow \text{Die } e_i(t) \text{ bilden ein ONS}$$

18.5 Norm auf V

$$\|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{f(t)} dt}$$

18.6 Gleichmäßige Konvergenz

Konvergiert $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e_k(t)$ gleichmäßig auf $[-\pi, \pi]$ gegen f ,
so gilt: f ist stetig, 2π -periodisch und $c_k = \langle f, e_k \rangle$.

18.7 Fourierreihen

Fourierkoeffizient: $\hat{f}(k) := \langle f, e_k \rangle \quad k \in \mathbb{Z}$

Fourierreihe von f : $(Ff)(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e_k(t)$

Fourierreihe konvergiert gleichmäßig $\Rightarrow (Ff)(t) = f(t)$.

18.8 Besselsche Ungleichung

$$\text{Für } f \in V \text{ gilt: } \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 \leq \|f\|_2^2$$

Gleichheit $\Leftrightarrow \underbrace{\text{Fourierreihe von } f \text{ konvergiert gegen } f}_{\text{in der } \|\cdot\|_2\text{-Norm}}$

18.9 Identitätssatz

Sind die Fourierreihen von f und g gleich, so sind auch f und g gleich. (Und umgekehrt!)

18.10 Punktweise Konvergenz der Fourierreihe

Bei Sprungstellen konvergiert die Fourierreihe gegen den Mittelwert aus rechts- und linksseitigem Grenzwert, sofern sowohl eine rechts- und linksseitige Ableitung existiert. (d.h. es gibt nur einen endlicher Sprung)

19 Lineare Algebra**19.1 Schreibweisen**

$\text{Lin}(v_1, \dots, v_k) = \text{span}(v_1, \dots, v_k) = [v_1, \dots, v_k] :=$
Menge aller Linearkombinationen aus v_1, \dots, v_k

ONS: Orthonormalsystem

19.2 Gruppen

Ein Paar (G, \circ) mit einer Menge G und einer inneren Verknüpfung \circ heißt Gruppe, falls:

- Assoziativität: $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \quad \forall a, b, c \in G$
- Neutrales Element: $\exists e \in G : a \circ e = e \circ a = a \quad \forall a \in G$
- Inverses Elem.: $\exists a^{-1} : a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e \quad \forall a \in G$

Eine Gruppe heißt abelsch oder kommutativ, wenn die Verknüpfung kommutativ ist: $a \circ b = b \circ a \quad \forall a, b \in G$
Die Inversen und das Neutrale Element sind eindeutig.

19.3 Basis vom VR V

$\{v_1, \dots, v_n\}$ sind Basis von V , falls

1. v_1, \dots, v_n linear unabhängig
2. $\text{Lin}(v_1, \dots, v_k) = V$

Die Darstellung eines beliebigen Vektors als Linearkombination von Basisvektoren ist eindeutig.

19.4 Dimension

Die Dimension eines Vektorraums ist gleich der Mächtigkeit der Basis.

19.5 Standardbasis

$\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ heißt Standardbasis oder Kanonische Basis.

19.6 Cauchy-Schwarz Ungleichung

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein unitärer Vektorraum:

$a, b \in V$

$$|\langle a, b \rangle| \leq \|a\| \cdot \|b\|$$

19.7 Lineare Abbildungen

V, W seien VR. Die Funktion $f : V \rightarrow W$ heißt linear, wenn:

$$f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) \quad \forall \alpha_i \in \mathbb{C} \quad \forall v_i \in V$$

$\mathcal{L}(V, W)$ bezeichnet die Menge aller linearer Funktionen von V nach W .

Eine Matrix A kann als lineare Abbildung verstanden werden mit $f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$ (\vec{x} hat eine Basis)

19.8 Isomorphismus

$f \in \mathcal{L}(V, W)$ sei bijektiv. Dann ist f ein Isomorphismus und die Vektorräume V und W sind isomorph. (d.h. sie sind von der Struktur her gleich)

19.9 Matrizen (Schreibweisen)

\bar{A} : Alle Elemente sind komplex konjugiert

A^T : transponieren: Die Matrix wird an der Diagonalen gespiegelt.

A^* : Adjugierte Matrix: $A^* := \bar{A}^T = \overline{A^T}$

$A = A^*$: Die Matrix heißt hermitsch.

$A = A^T$: Die Matrix heißt symmetrisch.

$A = -A^T \in \mathbb{R}^{(m,m)}$: Die Matrix heißt schiefsymmetrisch.

$\det A \neq 0$: Die Matrix heißt regulär.

19.10 Rang einer Matrix

Der Rang einer Matrix bezeichnet die Anzahl der linear unabhängigen Spalten/Zeilen der Matrix.

(Bemerkung: Zeilenrang = Spaltenrang)

19.11 Lineare Gleichungssysteme

$$A\vec{x} = \vec{y} \text{ ist lösbar} \Leftrightarrow \vec{y} \in \text{Bild}(A) \Leftrightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A, \vec{y})$$

Eindeutig lösbar, falls der Rang von A maximal ist!

19.12 Transpositionen

Transpositionen vertauschen zwei Objekte (Zahlen).

19.13 Permutationen

S_n ist die Menge aller Permutationen der Zahlen $1, 2, \dots, n$.

Jede Permutation lässt sich als Produkt von vielen Transpositionen schreiben. Das Vorzeichen der Permutation ist $(-1)^n$, wenn n die Anzahl der Transpositionen ist.

19.14 Eigenschaften der Determinate

1. sie ist multilinear, d.h. linear in jeder Spalte
2. sie ist alternierend, d.h. das Vertauschen zweier Spalten ändert gerade das Vorzeichen
3. sie ist normiert, d.h. die Einheitsmatrix hat die Determinante 1

19.15 Definition der Determinate

Nach der Leibniz-Formel ist die Determinante:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)} \right)$$

19.16 Laplacescher Entwicklungssatz

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det A_{ij}$$

wobei A_{ij} die Untermatrix von A ist, die durch Streichen der i -ten Zeile und j -ten Spalte entsteht.

(Statt über i kann auch über j summiert werden.)

19.17 Rechnen mit Determinaten

Produktregel:

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B \quad \forall n \times n\text{-Matrizen } A \text{ und } B.$$

Inverse:

Falls A invertierbar ist, dann ist $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.

Transponierte Matrix: Eine Matrix und ihre Transponierte haben dieselbe Determinante.

19.18 Adjunkte (\neq Adjungierte)

$$\left(\text{adj}(A) \right)_{i,j} := (-1)^{j+i} \cdot \det A_{j,i}$$

Man beachte, dass die Indizes von $A_{j,i}$ gedreht sind.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$$

19.19 Gramersche Regel

Falls das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{y}$ eindeutig lösbar ist:

$$\text{Lösung } \vec{x} \text{ gegeben durch: } \boxed{x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}} \quad \det(A) \neq 0$$

Die Matrix A_i entsteht aus A , indem man die i -te Spalte durch \vec{y} ersetzt.

19.20 Orthogonale Matrizen

A orthogonal $\stackrel{\text{Def.}}{\iff} A^T = A^{-1} \iff A^T$ orthogonal $\iff A^{-1}$ orthogonal \iff Spalten bilden ONS \iff Zeilen bilden ONS \iff Ist $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ ein ONS, so ist $A\vec{b}_1, \dots, A\vec{b}_n$ ein ONS

19.21 Eigenwert (Definition)

λ heißt Eigenwert (EW) von $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$, falls die Gleichung $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ Lösungen $\vec{x} \neq 0$ besitzt. Diese \vec{x} heißen Eigenvektor (EV) zum EW λ .

$$\boxed{\lambda \text{ ist EW von } A \iff \underbrace{\det(A - \lambda E) = 0}_{\text{Nullstellen des charakteristischen Polynom}}}$$

Die Vielfachheit der Nullstelle im charakteristischen Polynom heißt *algebraische Vielfachheit* m des Eigenwertes.

Die EV zu verschiedenen EW sind linear unabhängig.

19.22 Eigenraum

Eigenraum zu λ : $\text{Eig}(\lambda) := \text{Kern}(A - \lambda E)$

$$\gamma := \dim \text{Eig}(\lambda) := n - \text{Rang}(A - \lambda E) \quad A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$$

Mit der *geometrische Vielfachheit* γ

19.23 Der Eigenwert 0

A singular $\iff \exists$ EW $\lambda = 0$

A regulär $\iff \lambda \neq 0 \forall$ EW λ

19.24 Ähnliche Matrizen

$A, B \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ heißen *ähnlich*, falls:

$$\exists \text{ reguläres } C \in \mathbb{C}^{(n,n)} : B = C^{-1}AC$$

Ähnliche Matrizen besitzen die selbe Spur, Determinante und EW.

19.25 Diagonalisierbar

Ein Matrix $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ heißt diagonalisierbar, wenn sie zu einer Diagonalmatrix D ähnlich ist.

$$A \text{ besitze } n \text{ linear unabh. EV } \vec{v}_i \Rightarrow D = C^{-1}AC$$

$$\text{mit } C = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$$

19.26 Hermitsche Matrizen

$$A = A^* \in \mathbb{C}^{(n,n)}$$

1. Alle EW sind reell
2. A hat n orthonormale EV
3. A ist diagonalisierbar mit einer unitären Matrix C

$$D = C^*AC \quad \text{da } C^{-1} = C^*$$

Ist A sogar symmetrisch, so lässt sie sich mit einer orthogonale Matrix C diagonalisieren.

Wichtig: Die EV müssen dabei orthonormiert werden

19.27 Definitheit von Matrizen

$A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$, $A = A_1 + A_2$ mit $A_{1(2)}$ (schief-)symmetrisch

Jede reelle Matrix lässt sich in eine symmetrische und eine schiefsymmetrische Teilmatrix aufspalten.

A heißt...

... **positiv definit**, falls $\vec{x}^T A \vec{x} > 0 \forall \vec{x} \iff$ Alle EW positiv

... **positiv semidefinit**, falls $\vec{x}^T A \vec{x} \geq 0 \forall \vec{x} \iff$ Alle EW positiv oder Null

... **negativ (semi)definit**, falls $-A$ positiv (semi)definit

... **indefinit**, falls $\exists \vec{u}, \vec{v} : \vec{u}^T A \vec{u} > 0$ und $\vec{v}^T A \vec{v} < 0 \iff$ Es gibt positive und negative EW

Da $\vec{x}^T A_2 \vec{x} = 0$, falls A_2 schiefsymmetrisch ist, *kann* man sich auf den symmetrischen Teil der Matrix beschränken.

Für die Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2,2)}$ gilt:

- positiv definit, falls $a > 0$ und $ac - b^2 > 0$
- positiv semidefinit, falls $a + c > 0$ und $ac - b^2 = 0$
- negativ definit, falls $a < 0$ und $ac - b^2 > 0$
- indefinit, falls $ac - b^2 < 0$

19.28 Quadrik (Kegelschnitte)

Die Menge $\{\vec{x} | h(\vec{x}) = 0\}$ heißt Quadrik, wenn $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$; $x \mapsto \vec{x}^T A \vec{x} + 2\vec{b}^T \vec{x} + c$. Dabei kann A immer als symmetrisch angenommen werden.

19.29 Transformation (Quadrik)

Die Funktion $h(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x} + 2\vec{b}^T \vec{x} + c$ lässt sich durch Transformation $\vec{x} \mapsto C\vec{x} + \vec{m}$ in eine der folgenden Normalformen bringen:

1. $h(\vec{x}) = \vec{x}^T D \vec{x} + c_0$, mit Diagonalmatrix D , falls A vollen Rang hat

2. $h(\vec{x}) = \vec{x}^T D \vec{x} + 2\vec{b}_0^T \vec{x}$, falls A nicht vollen Rang hat

Dies geschieht durch Diagonalisieren der Matrix A mit Hilfe einer orthogonalen Matrix C und anschließendem Verschieben um \vec{m} .

19.30 Formen (Quadrik)

Man betrachte, die Eigenwerte der Diagonalmatrix (in der Normalform): \rightsquigarrow S. 32 (Formel und Hilfen zur HM)

20 DR mehrerer Variablen

20.1 offenen Gebiete

$D \subset \mathbb{R}^n$ heißt offen, falls zu jedem Punkt in D eine Umgebung existiert, die ganz in D liegt.

20.2 Stetigkeit, Diff'bar

\vec{f} ist stetig (oder diff'bar), falls jede Komponentenfunktion f_j stetig (oder diff'bar) ist.

(Achtung: Es gibt mehr als zwei Richtungen im \mathbb{R}^n)

20.3 Kurven

Eine Kurve im \mathbb{R}^n ist eine stetige Funktion $\vec{r}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($\vec{r}(I) = \text{Bild}(\vec{r})$) heißt Spur oder Trajektorie
Zu einer Kurve gehört immer eine Orientierung.

Eine Kurve heißt

geschlossen, wenn Anfangspunkt und Endpunkt gleich sind.

doppelpunktfrei oder einfach, wenn sie keine Doppelpunkte (Punkte, die mehrmals erreicht werden) besitzt.

Jordankurve oder einfach geschlossen, falls sie geschlossen ist, und der Anfangs- und Endpunkt der einzige Doppelpunkt ist.

glatt oder regulär, falls der Tangentialvektor $\dot{\vec{r}}(t) \neq 0 \forall t$

20.4 Bogenlänge

Das Supremum der beschränkten Menge aller Sehnenpolygone (der Kurve) heißt Länge L der Kurve. Falls diese Menge beschränkt ist, heißt die Kurve rektifizierbar. Ist die Menge nicht beschränkt, ist die Länge nicht definiert.

Jede C^1 -Kurve $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($a, b \neq \pm\infty$) ist rektifizierbar.

$$\text{Es gilt: } L(\vec{r}) := L_b^a(\vec{r}) := \int_a^b \|\dot{\vec{r}}(t)\| dt$$

Diese Länge ist unabhängig von der gewählten Darstellung der Kurve. (Umparametrisierung)

20.5 Richtungsableitung

$f: D_{\text{offen}} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ skalares Feld $\vec{x}_0 \in D$ fest $\vec{v} \in \mathbb{R}^n \neq 0$

Existiert $(D_{\vec{v}}f)(\vec{x}_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x}_0 + h\vec{v}) - f(\vec{x}_0)}{h}$, so heißt

dieser Limes Richtungsableitung von f in \vec{x}_0 in Richtung \vec{v} .
Für ein Vektorfeld gilt dies komponentenweise (vgl. 20.2).

20.6 partielle Ableitung

$$D_j := D_{\vec{e}_j} \quad \text{heißt partielle Ableitung nach}$$

der j -ten Variablen. (Mit dem Standardbasisvektor \vec{e}_j)

20.7 Jakobi- / Funktionalmatrix J

$$\vec{f}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$J_{\vec{f}} = (J\vec{f}) = \frac{\partial(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)}{\partial(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m)} := (D_k f_j)_{j,k} \in \mathbb{R}^{(n,m)}$$

Für $m = n$ heißt $\det J_{\vec{f}}$ Funktionaldeterminante.

20.8 Schwarzsche Satz

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal *stetig* partiell differenzierbar, dann gilt:

$$D_j D_k f = D_k D_j f \quad \forall j, k$$

20.9 Nabla-Identitäten

Für die Vektorfelder \vec{f} und \vec{g} gilt:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{f}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{f}) - \Delta \vec{f}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{f} \times \vec{g}) = \vec{g} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{f}) - \vec{f} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{g})$$

$$\vec{\nabla}(\vec{f} \cdot \vec{g}) = (\vec{f} \cdot \vec{\nabla})\vec{g} + (\vec{g} \cdot \vec{\nabla})\vec{f} + \vec{f} \times (\vec{\nabla} \times \vec{g}) + \vec{g} \times (\vec{\nabla} \times \vec{f})$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{f} \times \vec{g}) = (\vec{g} \cdot \vec{\nabla})\vec{f} - \vec{g}(\vec{\nabla} \cdot \vec{f}) + \vec{f}(\vec{\nabla} \cdot \vec{g}) - (\vec{f} \cdot \vec{\nabla})\vec{g}$$

20.10 Ableitung

\vec{f} ist in \vec{x}_0 diff'bar $\Leftrightarrow \exists \vec{R}$ stetig in $\vec{0}$ mit $\vec{R}(\vec{0}) = \vec{0}$

$$\vec{f}(\vec{x}_0 + \vec{h}) = \vec{f}(\vec{x}_0) + \vec{L}(\vec{h}) + \vec{R}(\vec{h})\|\vec{h}\| \quad \forall \vec{h}$$

Die Lineare Abbildung \vec{L} heißt Differential von \vec{f} in \vec{x}_0

Die (n, m) -Matrix, die \vec{L} bzgl. der Standardbasis zugeordnet ist, wird durch \vec{f}' bezeichnet. Diese Matrix heißt die Ableitung von \vec{f} in \vec{x}_0 .

Die Richtungsableitung lässt sich damit ausdrücken als:

$$(D_{\vec{v}}\vec{f})(\vec{x}) = \vec{f}'(\vec{x})\vec{v}$$

20.11 Stetig vs. Diff'bar

Ist \vec{f} diff'bar, so ist \vec{f} stetig.

Ist \vec{f} stetig partiell diff'bar, so ist \vec{f} diff'bar.

Aus der Existenz aller Richtungsableitungen in einem Punkt folgt nicht die Stetigkeit in diesem Punkt.

20.12 Tangentialebenen

Die Fläche $F \subset \mathbb{R}^3$ sei implizit durch $f(x, y, z) = c$ gegeben. (f diff'bar, $f' = \nabla f \neq \vec{0}$)

Dann ist die Tangentialebenen an \vec{p} gegeben durch:

$$\boxed{(\vec{r} - \vec{p})^T \nabla f(\vec{p}) = 0}$$

20.13 Taylorformel

$f : D_{\text{offen}} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^k(D)$, die partiellen Ableitungen der $(k+1)$ -ten Ordnung sollen existieren.

Dann gibt es für alle $x \in D$ ein $\vec{z} \in S_{x_0, x}$, falls

$$S_{x_0, x} := \{x_0 + t(x - x_0) | t \in [0, 1]\} \subset D$$

$$\boxed{f(\vec{x}) = \underbrace{\sum_{j=0}^k \frac{((\vec{x} - \vec{x}_0)\nabla)^j f(\vec{x}_0)}{j!}}_{T_k(f, \vec{x}_0)(\vec{x})} + \underbrace{\frac{((\vec{x} - \vec{x}_0)\nabla)^{k+1} f(\vec{z})}{(k+1)!}}_{\substack{R_k = o(\|\vec{x} - \vec{x}_0\|^k) \\ (\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0) \\ \text{Fehlerterm}}}}$$

Mit $k = 0$ folgt der Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

20.14 Hesse-Matrix

Mit der symmetrischen Hesse-Matrix $H_f(\vec{x}_0)$ lässt sich die Taylorformel in 2. Ordnung wie folgt darstellen:

$$H_f(\vec{x}_0) = (D_l D_k f(\vec{x}_0))_{l, k=1, \dots, n}$$

$$\boxed{f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + (\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot \nabla f(\vec{x}_0) + \frac{1}{2} (\vec{x} - \vec{x}_0)^T H_f(\vec{x}_0) (\vec{x} - \vec{x}_0) + o(\|\vec{x} - \vec{x}_0\|^3)}$$

20.15 Identitätssatz

Sind die Taylorreihen von f und g gleich, so sind auch f und g gleich. (Und umgekehrt!)

20.16 stationäre Punkte

Ein Punkt \vec{x}_0 heißt stationär/kritisch $\iff \nabla f(\vec{x}_0) = 0$

(f muss natürlich in \vec{x}_0 diff'bar sein.)

20.17 Extrempunkte, Sattelpunkte

Die Hessematrix H_f existiere im stationären Punkt \vec{x}_0 und in dessen Umgebung. Dann gilt:

$H_f(\vec{x}_0)$ **positiv definit**: isoliertes Minimum

$H_f(\vec{x}_0)$ **negativ definit**: isoliertes Maximum

$H_f(\vec{x}_0)$ **indefinit**: Sattelpunkt

$H_f(\vec{x}_0)$ **semidefinit**: keine allgemeine Aussage möglich

20.18 lokale Invertierbarkeit

Ist die Jakobimatrix $J_{\vec{f}}(\vec{x}_0)$ regulär, so ist \vec{f} in \vec{x}_0 lokal invertierbar. Für die Ableitung gilt:

$$\boxed{D\vec{f}^{-1}(\vec{x}_0) = [D\vec{f}(\vec{f}^{-1}(\vec{x}_0))]^{-1}}$$

Lokal bedeutet, dass es eine offene Umgebung (im Definitionsraum) gibt, für die das Bild ebenfalls eine offene Umgebung ist.

20.19 implizite Funktionen

$$\vec{f}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = \vec{0} \quad \partial_{\vec{y}} f(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \text{ regulär}$$

Dann ist die Gleichung lokal nach \vec{y} auflösbar: $\vec{y} = \vec{h}(\vec{x})$

$$\boxed{D_{\vec{x}} \vec{h}(\vec{x}) = - [\partial_{\vec{y}} \vec{f}(\vec{x}, \vec{h}(\vec{x}))]^{-1} \cdot \partial_{\vec{x}} \vec{f}(\vec{x}, \vec{h}(\vec{x}))}$$

21 IR mehrerer Variablen

21.1 Einführung

Im Folgenden sei G ein Gebiet (offen, zusammenhängend, beschränkt) und ∂G eine positiv orientierte stückweise glatte Randkurve und $\overline{G} = G \cup \partial G$ der Abschluss von G .

\vec{v} immer ein Vektorfeld und f, g Skalarfelder und γ eine stückweise glatte Kurve.

21.2 Vertauschung der Integrationsreihenfolge

Sei $f \in C^0(\overline{G})$ $\overline{G} = [a, b] \times [c, d]$

$$\Rightarrow \int_{x=a}^b \int_{y=c}^d f(x, y) dy dx = \int_{y=c}^d \int_{x=a}^b f(x, y) dx dy$$

21.3 Gaußscher Satz in der Ebene

$G \in \mathbb{R}^2$ sei durch Schnitte in endliche viele in x - und y -Richtung projizierbare Gebiete zerlegbar.

$$\vec{v} : \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \vec{v} \in C^1(G) \cap C^0(\overline{G})$$

$$\Rightarrow \oint_{\partial G} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \iint_G (D_1 v_2 - D_2 v_1) d(x, y)$$

$$\Rightarrow \oint_{\partial G} (\vec{v} \cdot \vec{n}) ds = \iint_G \text{div } \vec{v} d(x, y)$$

\vec{n} : äußerer Normalenvektor

21.4 Stokesscher Integralsatz in der Ebene

G und \vec{v} wie bei Gauß (21.3), nur dass $\vec{v} : \bar{G} \rightarrow \mathbb{R}^3$.

$$\Rightarrow \oint_{\partial G} \vec{v} \cdot \vec{ds} = \iint_G (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot \vec{e}_3 \, d(x, y)$$

21.5 1. Green'sche Formel

$g, f \in \mathcal{C}^2(G) \cap \mathcal{C}^1(\bar{G})$, \vec{N} Normalenvektor zu G , $D_{\vec{a}}g = \vec{\nabla}g \cdot \vec{a}$

$$\Rightarrow \int_{\partial G} f \underbrace{D_{\vec{N}}g}_{\frac{\partial g}{\partial N}} \, ds = \int_G (f \vec{\nabla}^2 g + \vec{\nabla}f \cdot \vec{\nabla}g) \, dG$$

21.6 2. Green'sche Formel

f und g vertauschen und die Gleichungen subtrahieren:

$$\Rightarrow \int_{\partial G} f D_{\vec{N}}g - g D_{\vec{N}}f \, ds = \int_G (f \vec{\nabla}^2 g - g \vec{\nabla}^2 f) \, dG$$

21.7 Potentialfelder

\vec{v} heißt Potentialfeld/Gradientenfeld/konservatives Feld, falls es ein diff'bares Skalarfeld f gibt mit:

$$\vec{v} = \vec{\nabla}f \quad f \text{ heißt dann Potential}$$

Ein Potential ist bis auf eine additive Konstante eindeutig. Die Jakobimatrix von einem stetig diff'baren Potentialfeldes ist symmetrisch.

$$\int_{\gamma(\vec{r}_0 \dots \vec{r}_1)} \vec{v} \cdot \vec{ds} = f(\vec{r}_1) - f(\vec{r}_0)$$

(1. Hauptsatz für Kurvenintegrale)

\vec{v} ist Potentialfeld \Leftrightarrow für je 2 Punkte ist $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot \vec{ds}$ unabhängig von der die Punkte verbindende Kurve $\gamma \Leftrightarrow \oint_{\gamma} \vec{v} \cdot \vec{ds} = 0 \forall \gamma$

21.8 einfach zusammenhängend

Ein Gebiet G heißt einfach-zusammenhängendes Gebiet, falls sich jede einfach geschlossene Kurve innerhalb von G auf einen Punkt stetig zusammenziehen lässt.

21.9 2. Hauptsatz für Kurvenintegrale

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ einfach zusammenhängend und $\vec{v} : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein \mathcal{C}^1 -Vektorfeld.

$$\vec{v} \text{ ist Potentialfeld} \Leftrightarrow D_j v_k = D_k v_j \quad \forall j, k$$

21.10 Normalenvektor

Der Gradient steht immer senkrecht auf den Niveaulinien eines Skalarfeldes.

$\Rightarrow \vec{\nabla}F(\vec{x})$ ist ein (nicht normierter) Normalvektor auf die Fläche, die durch $F(\vec{x}) = c$ gegeben ist.

21.11 Oberflächenintegrale im \mathbb{R}^3

$$d\vec{\sigma} = D_1 \vec{r}(u, v) \times D_2 \vec{r}(u, v) \, d(u, v)$$

heißt vektorielles Oberflächenelement

$do = \|d\vec{\sigma}\|$ heißt skalares Oberflächenelement

21.12 mehrdimensionale Variablentransformation

Gegeben sei eine Parametertransformation: $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \psi \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$

$$d(u, v) = \left| \det \left(J_{\vec{\psi}}(\xi, \eta) \right) \right| d(\xi, \eta)$$

21.13 Stokesscher Integralsatz

Sei F eine stückweise glatte, orientierte (!) Fläche. $\vec{v} \in \mathcal{C}^1(\bar{G}) : \bar{G} \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\Rightarrow \iint_F (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \, d\vec{\sigma} = \oint_{\partial F} \vec{v} \cdot \vec{ds}$$

21.14 Gaußscher Integralsatz

$G \in \mathbb{R}^3$ sei durch Schnitte in endliche viele in x -, y - und z -Richtung projizierbare Gebiete zerlegbar. Die Oberflächen ∂G seien stückweise glatt und orientierbar. \vec{N} seit der nach außen orientierte Normalenvektor.

$$\vec{v} : \bar{G} \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \vec{v} \in \mathcal{C}^1(\bar{G})$$

$$\Rightarrow \oint_{\partial G} \vec{v} \cdot \vec{N} \, do = \iiint_G \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \, d(x, y, z)$$

22 Funktionentheorie

22.1 Stetigkeit

$$\text{Stetig in } z_0 \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

22.2 Komplex diff'bar

$$\text{Komplex diff'bar in } z_0 \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \text{ existiert}$$

Dieser Grenzwert heißt komplexe Ableitung $f'(z_0)$.

22.3 holomorph

f ist holomorph $\Leftrightarrow f$ ist auf offenes Gebiet definiert und komplex diff'bar

Im Folgenden werden praktisch fast nur holomorphe Funktionen behandelt. (Auch wenn's oft nicht dabei steht.)

22.4 holomorphe Ableitung

$$f : D \rightarrow \mathbb{C} \text{ holomorph} \Rightarrow f' : D \rightarrow \mathbb{C} \text{ holomorph}$$

22.5 Cauchy-Riemann DGL

$f(z = x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ ist komplex diff'bar falls:

- $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$ oder
- $f_x = -if_y$ oder $f_z = f_x$ oder $f_{\bar{z}} = 0$

22.6 Harmonisch

$$f \text{ ist harmonisch} \Leftrightarrow \Delta f = u_{xx} + u_{yy} + i(v_{xx} + v_{yy}) = 0$$

Nach dem Satz von Schwarz folgt für holomorphe Funktionen, dass sie harmonisch sind.

22.7 Holomorphe Ergänzung

Ist D offen, einfach zusammenhängend und $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch in D , so gibt es eine harmonische Funktion $v : D \rightarrow \mathbb{R}$, sodass $f := u + iv$ in D holomorph ist.

v heißt zu u konjugiert harmonisch

22.8 Jacobimatrix

$$|\det J_f| = \left| \det \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \right| = |f'(x + iy)|^2 \quad \text{mit } f' = u_x + iv_x$$

22.9 Schlicht

schlicht = holomorph + injektiv (plakativ!)

$$g'(x_0) = \frac{1}{f'(g(x_0))} \quad \text{falls } g := f^{-1} \quad f' \neq 0$$

Manchmal nennt man solche Funktionen auch simpel oder einfach.

22.10 Flächeninhalt

Ist f schlicht, dann ist die Fläche von $f(D)$:

$$\text{Fläche}(f(D)) = \iint_D |f'(x + iy)|^2 dx dy$$

22.11 Flächen

$$\alpha \in \mathbb{R} \quad S_\alpha := \{z \in \mathbb{C} : \alpha < \text{Im}z < \alpha + 2\pi\}$$

$$\alpha \in [-\pi, \pi) \quad E_\alpha := \{r \cdot e^{i\varphi} \in \mathbb{C} : r \in \mathbb{R}_+, \varphi \in (\alpha, \alpha + 2\pi)\}$$

E_α ist die bei $e^{i\alpha}$ geschlitzte Ebene

Kreisscheibe: $K(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$

Kreisring: $A(z_0, r, R) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$

$r, R \in \hat{\mathbb{C}} \cup \{0\}$

22.12 Argument

(Neben)zweig: $\arg_\alpha : E_\alpha \rightarrow (\alpha, \alpha + 2\pi)$

Hauptzweig: $\text{Arg} := \arg_{-\pi} : E_{-\pi} \rightarrow (-\pi, \pi)$

22.13 Natürlicher Logarithmus

Für (Neben)zweig \log und Hauptzweig Log gilt ($k \in \mathbb{Z}$):

$$\log_{k,\alpha} : E_\alpha \rightarrow \mathbb{C} \quad \log_{k,\alpha}(z) = \ln |z| + i(\arg_\alpha(z) + 2\pi k)$$

$$\text{Log} : E_{-\pi} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{Log} := \log_{0,-\pi} = \ln |z| + i\text{Arg}(z)$$

22.14 Rechnen

$$\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad \exp(S_\alpha) = E_\alpha$$

$$\log_{k,\alpha}(E_\alpha) = S_{\alpha+2\pi k}$$

$$\exp(\log_{k,\alpha}(z)) = z \quad \forall z \in E_\alpha$$

$$\log_{k,\alpha}(\exp(z)) = z \quad \forall z \in S_{\alpha+2\pi k}$$

Wurzeln, Potenzen: $z^a := e^{a \cdot \log z}$ mehrdeutig, falls $a \notin \mathbb{R}$

22.15 Verallgemeinerte Kreise

Verallgemeinerte Kreise werden in \mathbb{C} beschrieben durch:

$$\alpha |z|^2 + \beta z + \overline{\beta z} + \gamma = 0 \quad \alpha, \gamma \in \mathbb{R} \quad \beta \in \mathbb{C} \quad \alpha \gamma < |\beta|^2$$

$$\gamma = 0 \Rightarrow \text{durch } 0 \quad \alpha = 0 \Rightarrow \text{Gerade}$$

$$\alpha \neq 0 \Rightarrow \left| z + \frac{\overline{\beta}}{\alpha} \right|^2 = \frac{|\beta|^2}{\alpha} - \frac{\gamma}{\alpha} \Rightarrow \text{Kreis}$$

22.16 Stereographische Projektion

$$\pi : \hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \underbrace{S}_{\text{Kugel}}$$

$$\pi(z) = \begin{cases} \left(\frac{2\text{Re}z}{|z|^2 + 1}, \frac{2\text{Im}z}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) & z \in \mathbb{C} \\ (0, 0, 1) & z = \infty \end{cases}$$

$$\pi^{-1}(\xi, \eta, \zeta) = \begin{cases} \frac{\xi + i\eta}{1 - \zeta} & \zeta \neq 1 \\ \infty & \zeta = 1 \end{cases}$$

Verallgemeinerte Kreise in $\hat{\mathbb{C}}$ gehen auf Kreise in S .

22.17 Konforme Abbildungen

konform = holomorph + $f'(z) \neq 0 \forall z$ (plakativ!)

schlicht \Rightarrow konform \Rightarrow lokal schlicht

konforme Abbildungen...

- sind winkeltreu
- bilden Gebiete auf Gebiete ab
- bilden deren Ränder auf Ränder ab
- sind orientierungstreu
- G, H seien einfach zusammenhängende Gebiete

$\Rightarrow \exists$ schlichtes/konformes/bijektives $f : f(G) = H$

22.18 Möbiustransformation

Eine Möbiustransformation ist eine konforme Abbildung:

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad a, b, c, d \in \mathbb{C} \quad ad - bc \neq 0$$

$$f(\infty) := \frac{a}{c} \quad f\left(-\frac{d}{c}\right) := \infty$$

Eine MT erhält das Doppelverhältnis:

$$\frac{w_1 - w_2}{w_1 - w_4} \frac{w_3 - w_4}{w_3 - w_2} = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_4} \frac{z_3 - z_4}{z_3 - z_2} \quad w_k = f(z_k)$$

MT bilden eine Gruppe mit $f = f_1 \circ f_2$.

Jede MT lässt sich als Hintereinanderschaltung von Inter-
tierung, Drehstreckung und Translation darstellen.

22.19 Kurvenintegrale

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt = \int_{\gamma} (u dx - v dy) + i(v dx + u dy)$$

γ : Kreis um a ; l -mal mathematisch positiv durchlaufen

$$\int_{\gamma} (z - a)^k dz = \begin{cases} 2\pi i \cdot l & k = -1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

22.20 Cauchy Integralsatz

G sei einfach zusammenhängendes Gebiet

$f : G \rightarrow \mathbb{C}$ sei holomorph bis auf endliche viele Punkte, in denen f stetig ist

γ sei stückweise stetig diff'bare geschlossenen Kurve in G .

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$$

\Rightarrow Es reicht bei geschlossenen Integralen die Integrale um die Singularitäten zu betrachten.

22.21 Cauchysche Integralformel

f holomorph auf Gebiet G . γ eine einfach geschlossene stückweise stetig diff'bare Kurve in G .

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad \forall z_0 \in D$$

22.22 Potenzreihenentwicklung

f holomorph auf Gebiet G mit $K(z_0, r) \in G$. Für jedes $z \in K(z_0, r)$ gilt:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0| = \rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} d\xi$$

22.23 Laurentreihe

$$f(z) = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k (z - z_0)^k}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k}_{\text{Nebenteil}}$$

22.24 Konvergenz der Laurentreihe

$$R_{\pm} = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_{\pm k}|}} \quad r_{\pm} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_{\pm k}|}$$

Hauptteil konvergent für $|z - z_0|^{-1} < R_-$ ($r_- < |z - z_0|$)

Nebenteil konvergent für $|z - z_0| < R_+$

Gesamt konvergent bei $z \in A(z_0, r_-, R_+)$

22.25 Singularitäten

$z_0 \in \mathbb{C} \setminus G$ heißt isolierte Singularität, falls eine Umgebung um z_0 ganz in G liegt.

- z_0 heißt hebbare Singularität, falls $a_k = 0 \quad \forall k < 0$
- z_0 heißt Polstelle der Ordnung $p \in \mathbb{N}$, falls $a_{-p} \neq 0$ und $a_{-k} = 0 \quad \forall k > p$
- z_0 heißt wesentliche Singularität, falls $a_k \neq 0$ für unendliche viele $k < 0$

(Für die Bezeichnungen vergleiche ab 22.22)

22.26 Residuum

Der Laurentkoeffizient a_{-1} heißt Residuum von f in z_0 .

$$\text{Res}(f, z_0) := a_{-1}$$

22.27 Bestimmung von Residuen

- Koeffizient a_{-1} der Laurentreihe

$$2. f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} \quad g(z_0) \neq 0 \quad h'(z_0) \neq 0 \quad \underbrace{g, h}_{\text{holom. auf } K(z_0, r)}$$

$$\Rightarrow \text{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

- z_0 ist Polstelle der Ordnung p :

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{d}{dz} \right)^{p-1} \left[(z - z_0)^p f(z) \right]$$

22.28 Residuensatz

f holomorph auf G γ eine „normale“ Kurve in \hat{G}
 $\hat{G} := G \cup \{z_l\}$ z_l Singularitäten innerhalb von γ

$$\Rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_l \text{Res}(f, z_l)$$

Stichwortverzeichnis

1. Ordnung (linear), **17.1**, 10
 2π -Periodische Funktionen, **18.3**, 12
 2. Ordnung (linear), **17.13**, 11

Abbildungen, *siehe* Funktionen
 abelsch, **19.2**, 12
 Abgewandelter Potenzreihenansatz, **17.17**, 11
 Ableitung, **20.10**, 15
 Abschluss, **21.1**, 16
 Absolute Konvergenz, **10.1**, 7
 Abstand zur Ebene, **8.6**, 6
 Adjungierte Matrix, **19.9**, 13
 Adjunkte (\neq Adjungierte), **19.18**, 13
 ähnlich, **19.24**, 14
 Ähnliche Matrizen, **19.24**, 14
 Ähnlichkeits-DGL, **17.3**, 10
 algebraische Vielfachheit m , **19.21**, 14
 Anordnung, **4.2**, 5
 aposteriori, **15.10**, 9
 apriori, **15.10**, 9
 Argument, **22.12**, 18
 Aussagenlogik, **1.0**, 4

bac-cab, **8.7**, 7
 Basis vom VR V , **19.3**, 12
 Bernoulli-DGL, **17.10**, 11
 Bernoullische Ungleichung, **5.1**, 5
 beschränkt, **4.3**, 5
 Beschränktheit, **12.6**, 8
 Beschränktheit, **4.3**, 5
 Beschränktheit, **9.1**, 7
 Besselsche Ungleichung, **18.8**, 12
 Bestimmung von Residuen, **22.27**, 19
 Beträge, **6.0**, 5
 Betrag einer komplexen Zahl:, **7.1**, 6
 bijektiv, **3.2**, 4

Binomialkoeffizienten, **5.3**, 5
 Binomische Formel, **7.1**, 6
 Bogenlänge, **20.4**, 15

 C^k , **12.2**, 8
 Cauchy Integralsatz, **22.20**, 19
 Cauchy-Folge, **9.8**, 7
 Cauchy-Produkt, **10.3**, 7
 Cauchy-Riemann DGL, **22.5**, 18
 Cauchy-Schwarz Ungleichung, **19.6**, 13
 Cauchysche Integralformel, **22.21**, 19
 charakteristischen Polynom, **19.21**, 14
 Cronwall, **17.18**, 11

De Morgan'sche Gesetze, **2.3**, 4
 De Morgan'schen Gesetze, **1.2**, 4
 Definitheit von Matrizen, **19.27**, 14
 Definition der Determinate, **19.15**, 13
 Definition mit Fehlerterm, **15.2**, 9
 Definition, **15.1**, 9
 Definition, **16.1**, 9
 Determinate (Definition), **19.15**, 13
 Determinate (Eigenschaften), **19.14**, 13
 Determinaten (Rechnen), **19.17**, 13
 DGL, **17.0**, 10
 Diagonalisierbar, **19.25**, 14
 Dichte von \mathbb{Q} und \mathbb{R} , **4.7**, 5
 Diff'bar vs. Stetig, **20.11**, 16
 diff'bar, **15.1**, 9
 Differential, **20.10**, 15
 Differentialrechnung mehrerer Variablen, **20.0**, 15
 Differenzialrechnung einer Variablen in \mathbb{R} , **15.0**, 9
 Differenzierbarkeit, **20.2**, 15
 Dimension, **19.4**, 13
 Disjunktive Vereinigung, **2.2**, 4
 Distributivgesetz, **4.1**, 5
 Doppelpunkte, **20.3**, 15

doppelpunktfrei, **20.3**, 15
 Doppelverhältnis, **22.18**, 19
 DR mehrerer Variablen, **20.0**, 15
 Dreiecksungleichung, **6.1**, 5

 Eigenraum, **19.22**, 14
 Eigenschaften der Determinate, **19.14**, 13
 Eigenvektor, **19.21**, 14
 Eigenwert (Definition), **19.21**, 14
 Eigenwert 0, **19.23**, 14
 eindeutig lösbar, **17.2**, 10
 Einführung, **21.1**, 16
 einfach geschlossen, **20.3**, 15
 einfach zusammenhängend, **21.8**, 17
 einfach, **20.3**, 15
 einfach, **22.9**, 18
 Elementare Funktionen, **14.0**, 8
 epsilon-delta-Definition, **12.3**, 8
 euklidisch, **8.3**, 6
 Eulersche DGL, **17.11**, 11
 Eulersche Zahl e , **9.7**, 7
 Exakte DGL, **17.8**, 10
 Existenz und Eindeutigkeit, **17.4**, 10
 Exponentialfunktion, **11.0**, 8
 Extrempunkte, Sattelpunkte, **20.17**, 16
 Extrempunkte, Wendepunkte, **15.7**, 9

 Fehlerterm, **20.13**, 16
 Fixpunktsatz von Banach, **15.10**, 9
 Flächen, **22.11**, 18
 Flächeninhalt, **22.10**, 18
 Folgen, **9.0**, 7
 Formen (Quadrik), **19.30**, 15
 Fourierreihen, **18.0**, 12
 Fourierreihen, **18.7**, 12
 Fundamentalsatz der Algebra, **7.4**, 6
 Fundamentalsystem, **17.14**, 11

- Funktionaldeterminante, **20.7**, 15
 Funktionalmatrix, **20.7**, 15
 Funktionen, **3.0**, 4
 Funktionenfolgen, **13.0**, 8
 Funktionentheorie, **22.0**, 17

 GAM-Ungleichung, **6.3**, 5
 Gaußscher Integralsatz, **21.14**, 17
 Gaußscher Satz in der Ebene, **21.3**, 16
 Gebiet, **21.1**, 16
 Gebrochen rationale Funktion, **16.6**, 10
 Geometrische Reihe, **5.2**, 5
 geometrische Vielfachheit γ , **19.22**, 14
 Geometrisches Kriterium, **13.7**, 8
 geschlossen, **20.3**, 15
 glatt, **20.3**, 15
 Gleichheit von Funktionen, **3.1**, 4
 Gleichmäßige Konvergenz, **13.2**, 8
 Gleichmäßige Konvergenz, **18.6**, 12
 Graßmann-Identität, **8.7**, 7
 Gradient, **21.10**, 17
 Gradientenfeld, **21.7**, 17
 Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren, **8.5**, 6
 Gramersche Regel, **19.19**, 14
 graph(f), **3.0**, 4
 Green'sche Formel (1), **21.5**, 17
 Green'sche Formel (2), **21.6**, 17
 Grenzwerte bei Funktionen, **12.1**, 8
 Grenzwerte, **9.4**, 7
 Gruppen, **19.2**, 12

 Häufungspunkt, **9.2**, 7
 Harmonisch, **22.6**, 18
 Hauptsatz für Kurvenintegrale (1), **21.7**, 17
 Hauptsatz für Kurvenintegrale (2), **21.9**, 17
 Hauptteil, **22.23**, 19
 hebbare Singularität, **22.25**, 19

 hermitsch, **19.9**, 13
 Hermitsche Matrizen, **19.26**, 14
 Hesse Normalform, **8.6**, 6
 Hesse-Matrix, **20.14**, 16
 holomorph, **22.3**, 17
 holomorphe Ableitung, **22.4**, 18
 Holomorphe Ergänzung, **22.7**, 18

 Identitätssatz, **13.8**, 8
 Identitätssatz, **18.9**, 12
 Identitätssatz, **20.15**, 16
 Implizite DGL 1. Ordnung, **17.6**, 10
 Implizite DGL 2. Ordnung, **17.7**, 10
 implizite Fläche \rightarrow Tangentialebenen, **20.12**, 16
 implizite Funktionen, **20.19**, 16
 induktiv, **5.0**, 5
 Infimum, **4.5**, 5
 Infimum, **4.6**, 5
 injektiv, **3.2**, 4
 Inklusion, **2.2**, 4
 innere Verknüpfungen, **4.1**, 5
 Integralrechnung einer Variablen in \mathbb{R} , **16.0**, 9
 Integralrechnung mehrerer Variablen, **21.0**, 16
 Integrierbarkeit, **16.2**, 9
 Integrierender Faktor, **17.9**, 11
 Intervale, **0.1**, 4
 Invertierbarkeit (lokal), **20.18**, 16
 IR mehrerer Variablen, **21.0**, 16
 isolierte Singularität, **22.25**, 19
 Isomorphismus, **19.8**, 13

 Jacobi-Identität, **8.7**, 7
 Jacobimatrix, **22.8**, 18
 Jakobi- / Funktionalmatrix J , **20.7**, 15
 Jordankurve, **20.3**, 15

 Körper, **4.1**, 5
 Kanonische Basis, **19.5**, 13

 Kegelschnitte, **19.28**, 14
 kommutativ, **19.2**, 12
 Komplement, **2.2**, 4
 Komplex diff'bar, **22.2**, 17
 Komplex konjugiert, **7.0**, 6
 Komplexe Zahlen \mathbb{C} , **7.0**, 6
 Konforme Abbildungen, **22.17**, 18
 konjugiert harmonisch, **22.7**, 18
 konjugiert, **7.0**, 6
 konservatives Feld, **21.7**, 17
 Konvergenz der Laurentreihe, **22.24**, 19
 Konvergenzradius r , **13.4**, 8
 kritischer Punkt, **20.16**, 16
 Kurven, **20.3**, 15
 Kurvenintegrale, **22.19**, 19

 L'Hospital, **15.9**, 9
 Lagrange-Identität, **8.7**, 7
 Landau-Symbole, **14.1**, 8
 Laplacescher Entwicklungssatz, **19.16**, 13
 Laurentreihe, **22.23**, 19
 Leere Menge \emptyset , **2.4**, 4
 Leibniz-Formel, **19.15**, 13
 Leibniz-Kriterium, **9.5**, 7
 Lemma von Cronwall, **17.18**, 11
 LGS, **19.11**, 13
 Lineare Abbildungen, **19.7**, 13
 Lineare Algebra, **19.0**, 12
 Lineare Gleichungssysteme, **19.11**, 13
 Lineare homogenen DGL (System), **17.20**, 11
 Linearkombination, **19.3**, 12
 Lipschitz-Konstante, **15.10**, 9
 Logarithmus, **22.13**, 18
 Logik, *siehe* Aussagenlogik
 lokal invertierbar, **20.18**, 16
 lokale Invertierbarkeit, **20.18**, 16
 Möbiustransformation, **22.18**, 19

- Majorantenkriterium, **10.2**, 7
 Majorantenkriterium, **13.3**, 8
 Majorantenkriterium, **16.9**, 10
 Matrizen (Schreibweisen), **19.9**, 13
 Matrizen, **0.2**, 4
 Maximum (Minimum analog), **4.4**, 5
 Maximum, **12.6**, 8
 Mengen, **2.0**, 4
 Minimum, **12.6**, 8
 Minimum, **4.4**, 5
 Minorantenkriterium, **10.2**, 7
 Minorantenkriterium, **16.9**, 10
 Mittelwertsatz der Differentialrechnung, **20.13**, 16
 Mittelwertsatz der DR, **15.5**, 9
 Mittelwertsatz der IR, **16.4**, 10
 monoton fallend, **3.3**, 4
 monoton wachsend, **3.3**, 4
 Monotonie, **3.3**, 4
 MWSDR, **15.5**, 9
 MWSIR, **16.4**, 10

 Nabla-Identitäten, **20.9**, 15
 Natürlicher Logarithmus, **22.13**, 18
 Nebenteil, **22.23**, 19
 Norm auf V , **18.5**, 12
 Norm, **8.2**, 6
 Normalenvektor, **21.10**, 17

 Oberflächenintegrale im \mathbb{R}^3 , **21.11**, 17
 offenen Gebiete, **20.1**, 15
 ONS = Orthonormalsystem, **19.1**, 12
 Ordnung in \mathbb{C} existiert nicht, **7.5**, 6
 Ordnung in \mathbb{R} , **4.2**, 5
 Orientierung, **20.3**, 15
 Orthogonale Matrizen, **19.20**, 14
 orthogonale Projektion, **8.4**, 6
 orthonormiert, **19.26**, 14

 partielle Ableitung, **20.6**, 15
 Partielle Integration, **16.5**, 10
 Peano, **17.4**, 10
 periodische Funktionen, **18.1**, 12
 Permutationen, **19.13**, 13
 Picard-Iteration, **17.5**, 10
 Picard-Lindelöf, **17.4**, 10
 Polardarstellung, **7.2**, 6
 Polstelle der Ordnung $p \in \mathbb{N}$, **22.25**, 19
 Potential, **21.7**, 17
 Potentialfelder, **21.7**, 17
 Potenzen, **22.14**, 18
 Potenzmenge \mathcal{P} , **2.2**, 4
 Potenzreihen, **15.8**, 9
 Potenzreihen, **16.7**, 10
 Potenzreihenansatz, **17.16**, 11
 Potenzreihenentwicklung, **22.22**, 19
 Punktweise Konvergenz der Fourierreihe, **18.10**, 12
 Punktweise Konvergenz, **13.1**, 8

 Quadrik (Kegelschnitte), **19.28**, 14
 Quadrik (Transformation), **19.29**, 14
 Quetsch-Lemma, **9.6**, 7
 Quotientenkriterium, **13.6**, 8

 Rang einer Matrix, **19.10**, 13
 Rechnen mit Determinanten, **19.17**, 13
 Rechnen mit Grenzwerten, **9.4**, 7
 Rechnen, **22.14**, 18
 Reelle Zahlen, **4.0**, 4
 Regel von L'Hospital, **15.9**, 9
 regulär, **19.9**, 13
 regulär, **20.3**, 15
 Reihen, **10.0**, 7
 rektifizierbar, **20.4**, 15
 Residuensatz, **22.28**, 19
 Residuum, **22.26**, 19

 Riccati-DGL, **17.12**, 11
 Richtungsableitung, **20.10**, 15
 Richtungsableitung, **20.5**, 15
 Russellsche Antinomie, **2.1**, 4

 Sattelpunkte, **20.17**, 16
 Satz von Bolzano-Weierstrass, **9.3**, 7
 Satz von Peano, **17.4**, 10
 Satz von Picard-Lindelöf, **17.4**, 10
 schiefssymmetrisch, **19.9**, 13
 Schlicht, **22.9**, 18
 Schreibweisen für Matrizen, **19.9**, 13
 Schreibweisen, **0.0**, 4
 Schreibweisen, **19.1**, 12
 Schwarz'sche Ungleichung, **6.4**, 6
 Schwarzsche Satz, **20.8**, 15
 simpel, **22.9**, 18
 Singularitäten, **22.25**, 19
 skalares Feld, **20.5**, 15
 Skalarprodukt auf V , **18.4**, 12
 Skalarprodukt, **6.4**, 6
 Skalarprodukt, **8.3**, 6
 Spur, **19.24**, 14
 Spur, **20.3**, 15
 Stabilität, **17.21**, 12
 Standardbasis, **19.5**, 13
 stationäre Punkte, **20.16**, 16
 Stereographische Projektion, **22.16**, 18
 Stetig vs. Diff'bar, **20.11**, 16
 Stetigkeit, **12.0**, 8
 Stetigkeit, **12.2**, 8
 Stetigkeit, **15.3**, 9
 Stetigkeit, **22.1**, 17
 Stetigkeit, Diff'bar, **20.2**, 15
 Stokesscher Integralsatz in der Ebene, **21.4**, 17
 Stokesscher Integralsatz, **21.13**, 17
 streng monoton, **3.3**, 4

- Substitution (mehrdimensional), **21.12**, 17
Supremum (*Infinium analog*), **4.5**, 5
Supremum, **4.6**, 5
surjektiv, **3.2**, 4
Surjektivität und Injektivität, **3.2**, 4
Symbole, **1.1**, 4
Symbole, **2.2**, 4
symmetrisch, **19.9**, 13
Symmetrische Differenz, **2.2**, 4
System von DGL erster Ordnung, **17.19**, 11
- Tangentialebenen, **20.12**, 16
Tangentialvektor, **20.3**, 15
Taylorformel, **20.13**, 16
Taylorpolynom von $f(x)$ in x_0 , **15.6**, 9
TdV, **17.2**, 10
Trajektorie, **20.3**, 15
Transformation (Quadrik), **19.29**, 14
transponieren, **19.9**, 13
Transpositionen, **19.12**, 13
Trigonometrische Polynome, **18.2**, 12
Trigonometrische Reihe, **18.2**, 12
- Umgebung, **6.2**, 5
Umkehrfunktion, **15.4**, 9
Umkehrfunktionen, **12.4**, 8
Umparametrisierung, **20.4**, 15
Uneigentliche Integrale, **16.8**, 10
Ungleichungen, **7.5**, 6
unitär, **8.3**, 6
Unordnung in \mathbb{C} , **7.5**, 6
- Variablentransformation (mehrdimensional), **21.12**, 17
Vektorfeld, **21.1**, 16
Vektoridentitäten, **8.7**, 7
Vektorraum, **17.20**, 11
Vektorraum, **8.1**, 6
Vektorrechnung, **8.0**, 6
- Verallgemeinerte Kreise, **22.15**, 18
Vertauschung der Integrationsreihenfolge, **21.2**, 16
Vielfachheit, **19.22**, 14
Vollständige Induktion, **5.0**, 5
Vollständigkeitsaxiom in \mathbb{R} , **4.6**, 5
- Wendepunkte, **15.7**, 9
wesentliche Singularität, **22.25**, 19
Wronski-Determinante, **17.15**, 11
Wurzel, **7.3**, 6
Wurzel-/ Quotientenkriterium, **10.4**, 7
Wurzelkriterium, **13.5**, 8
Wurzeln, **22.14**, 18
- Zerlegungen, **16.3**, 9
Zwischenwertsatz, **12.5**, 8