Inhaltsverzeichnis

0 Schreibweisen

$c_\blacklozenge$**:** const.

$\exists!\, x$**:** Es existiert genau ein x

0.1 Intervale

$$]a, b[:= (a, b) := \{x \mid a < x < b\}$$
$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$$

Die Notationen können an den Rändern gemischt werden.

0.2 Matrizen

A_{ij} meint die i-Zeile und die j-Spalte der Matrix A.

Ebenso meint $A \in \mathbb{R}^{(m,n)} = \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten.

1 Aussagenlogik

Eine *Aussage* ist ein Satz, der entweder wahr oder falsch ist.

1.1 Symbole

Negation: $\neg$	Äquivalenz: $\leftrightarrow$	Konjunktion (und): $\wedge$
Implikation (wenn..., dann):	$\rightarrow$	Disjunktion (oder): $\vee$

1.2 De Morgan'schen Gesetze

$$\begin{array}{c} \neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b \\ \neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{c} \overline{(a \wedge b)} = \overline{a} \vee \overline{b} \\ \overline{(a \vee b)} = \overline{a} \wedge \overline{b} \end{array}$$

2 Mengen

Für jede Menge M und jedes Objekt x gilt

$$\boxed{x \in M \qquad \text{(exklusives) oder} \qquad x \notin M}$$

2.1 Russellsche Antinomie

Klasse aller Klassen, die sich nicht selbst als Element enthalten: $R := \{x | x \notin x\}$ R ist in sich widersprüchlich

2.2 Symbole

Inklusion: $U \subset O$ U ist Teilmenge von O.
(transitiv, reflexiv, *nicht symmetrisch*)
Differenz: $M \setminus N := M \cap \overline{N}$
Komplement: $\complement_O U := O \setminus U$ $(U \subset O)$
$\underbrace{\text{Disjunktive Vereinigung}}_{\text{Symmetrische Differenz}}$: $M \triangle N := (M \cup N) \setminus (M \cap N)$

$$\boxed{\Big(M_1 = M_2\Big) \overset{\text{Def}}{\longleftrightarrow} \Big((M_1 \subset M_2) \wedge (M_2 \subset M_1)\Big)}$$

Potenzmenge $\mathcal{P}(M) :=$ Menge aller Teilmengen von M

2.3 De Morgan'sche Gesetze

Für jede beliebige endliche, abzählbare oder auch nicht abzählbare Indexmenge I:

$$\overline{\bigcap_{i\in I} M_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{M_i} \quad \text{und} \quad \overline{\bigcup_{i\in I} M_i} = \bigcap_{i\in I} \overline{M_i}$$

2.4 Leere Menge $\emptyset$

$$\text{Axiomatisch:} \quad \begin{array}{l} x \in \emptyset \quad \text{ist stets falsch} \\ \emptyset \subset M \quad \text{ist stets wahr} \end{array}$$

3 Funktionen/Abbildungen

Eine Vorschrift f, die jedem Element $x \in X$ genau ein Element $y \in Y$ zuordnet, heißt Funktion/Abbildung von X nach Y. (X, Y: Mengen)

$$f : X \to Y \qquad \text{graph}(f) := \{(x, y) \in (X \times Y) | \, y = f(x)\}$$

3.1 Gleichheit von Funktionen

Die Funktion $f : X \to Y$, $g : U \to V$ sind gleich, falls

$$X = U \quad \text{und} \quad f(x) = g(x) \quad \forall x \in X$$

Umkehrfunktion f^{-1}: $\quad f^{-1} \circ f = \text{id} = f \circ f^{-1}$

$$\left(f^{-1}\right)^{-1} = f \qquad (f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

3.2 Surjektivität und Injektivität

$f : X \to Y$ heißt...
...*surjektiv*, falls Bild$(f) = Y$
...*injektiv*, falls aus $f(x_1) = f(x_2)$ folgt $x_1 = x_2$
...*bijektiv*, falls f surjektiv und injektiv ist

$$f \text{ ist bijektiv } \Leftrightarrow f^{-1} \text{ ist bijektiv}$$

3.3 Monotonie

f heißt streng monoton wachsend $\uparrow$, falls

$$\boxed{\text{aus} \quad x_1 < x_2 \quad \text{folgt} \quad f(x_1) < f(x_2)}$$

$$f \uparrow \Leftrightarrow f^{-1} \uparrow \qquad f \downarrow \Leftrightarrow f^{-1} \downarrow$$

Analog für monoton fallend $\downarrow$:
Weglassen von *streng* $\Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

4 Reelle Zahlen

Die Menge $\mathbb{R}$ heißt die Menge der reellen Zahlen, falls folgendes gilt:

4.1 innere Verknüpfungen

Es gibt zwei innere Verknüpfungen $(+,\cdot)$ mit

$(\mathbb{R},+)$: abelsche Gruppe mit neutralem Element 0 und inversem Element $\text{inv}(a) = -a$

$(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$: abelsche Gruppe mit neutralem Element 1 und inversem Element $\text{inv}(a) = a^{-1} = \frac{1}{a}$

Und es gilt das Distributivgesetz: $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$

$$\Rightarrow (\mathbb{R},+,\cdot) \text{ ist ein Körper}$$

4.2 Anordnung

- $\forall a \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der folgenden Aussagen:

$$a > 0 \qquad -a > 0 \qquad a = 0$$

- Aus $a > 0$, $b > 0$ folgt $(a+b) > 0$ und $(a\cdot b) > 0$

4.3 Beschränktheit

- Eine Menge M heißt nach oben (unten) beschränkt, wenn ein Schranke S existiert, für das gilt:

$$x \le S\ \forall x \in M \qquad (x \ge S)$$

- Eine Menge heißt beschränkt, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist.
- Eine Funktion heißt beschränkt, wenn ihr Bild beschränkt ist.

4.4 Maximum (Minimum analog)

$$m \text{ ist Maximum von } M \iff (m \in M) \wedge (x \le m\ \forall x \in M)$$

$$\min(M) = -\max(-M)$$

4.5 Supremum (Infinium analog)

Das Supremum einer Menge ist die kleinste obere Schranke:

$$M \le \sup(M) \qquad M \le s \Rightarrow \sup(M) \le s \quad \forall s$$

$$\inf(M) = -\sup(-M)$$

4.6 Vollständigkeitsaxiom in $\mathbb{R}$

Jede nichtleere nach oben beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}$ besitzt ein Supremum.

Dies gilt *nicht* in $\mathbb{Q}$.

$$M = \{x \in \mathbb{Q} | x > 0, x^2 < 2\} \qquad \sup(M) = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

4.7 Dichte von $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$

$$x, y \in \mathbb{R} \text{ mit } x < y$$

$$\Rightarrow \exists q \in \mathbb{Q} \text{ mit } x < q < y \qquad \exists r \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \text{ mit } x < r < y$$

5 Vollständige Induktion

$M \subset \mathbb{R}$ heißt induktiv $\Leftrightarrow (1 \in M) \wedge (x \in M \to x+1 \in M)$

$$\bigcap_{\substack{M \text{ ist} \\ \text{induktiv}}} M = \mathbb{N}$$

5.1 Bernoullische Ungleichung

Vorraussetzung: $x \ge -1 \quad n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{(1+x)^n \ge 1 + n\cdot x}$$

5.2 Geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad q \ne 1$$

5.3 Binomialkoeffizienten

$$n \in \mathbb{N} \quad k \in \mathbb{N}_0 \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}} \qquad k\cdot\binom{n}{k} = n\cdot\binom{n-1}{k-1}$$

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k} \qquad \boxed{\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}}$$

$$\boxed{\binom{\alpha}{k} = \frac{\overbrace{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}^{k \text{ Terme}}}{k!}} \qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$$

6 Beträge

6.1 Dreiecksungleichung

$$\boxed{0 \le \big||x| - |y|\big| \le |x \pm y| \le |x| + |y|}$$

$$x, y \in \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$$

6.2 Umgebung

$$\boxed{U_\varepsilon(a) := \{x \,\big|\, |x-a| < \varepsilon\}} \qquad \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow U_\varepsilon(a) = \{x \,|\, a - \varepsilon \le x \le a + \varepsilon\}$$

6.3 GAM-Ungleichung

$$\boxed{\bar{x}_{\text{geom}} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}_{\text{arithm}}}$$

6.4 Schwarz'sche Ungleichung

$$\boxed{\sum_i |x_i \cdot y_i| \le \sqrt{\sum_i x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_i y_i^2}} \qquad a_i, b_i \in \mathbb{R}$$

Für ein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$:

$$|\langle x, y\rangle|^2 \le \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle$$

7 Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

Einführung: i als eine Lösung der Gleichung $x^2 + 1 = 0$. Die Körperaxiome aus $\mathbb{R}$ werden dadurch nicht verletzt.

Komplex konjugiert: $\overline{z} = z^* = \mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z)$

7.1 Binomische Formel

$$|w \pm z|^2 = |w|^2 \pm 2\mathrm{Re}(z\overline{w}) + |z|^2$$

Betrag einer komplexen Zahl: $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$

7.2 Polardarstellung

$$z = r \cdot e^{i\varphi} = r \cdot (\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$$

Betrag r Argument φ

7.3 Wurzel

$$(n \in \mathbb{N}): \boxed{\sqrt[n]{r \cdot e^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{1}{n}(\varphi + 2k\pi)}} \qquad k = 0, \dots, n-1$$

7.4 Fundamentalsatz der Algebra

Jedes komplexe nicht konstante Polynom besitzt eine komplexe Nullstelle.

7.5 (Un-)Ordnung in $\mathbb{C}$

Der Körper $\mathbb{C}$ ist nicht geordnet. D.h. es gibt keine Ungleichungsrelation $<$ bzw. $>$ wie im Körper $\mathbb{R}$.

8 Vektorrechnung

8.1 Vektorraum

V heißt komplexer (reeller) Vektorraum (VR), wenn:

1. $\exists$ Verknüfung „+“ : $(V, +)$ ist abelsche Gruppe
2. $\exists$ assoziative, distributive Vorschrift „·“ :
   $\alpha \cdot x$ ist eindeutig und $1 \cdot x = x \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}(\mathbb{R}), x \in V$

Die Lösungsmenge von lineare homogenen Gleichungssystemen sind reelle Vektorräume:

$$0 = A\vec{x} \qquad \text{oder auch:} \quad \vec{y}' = A(x)\vec{y}$$

8.2 Norm

V sei ein $\mathbb{K}$-VK. $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ heißt Norm, wenn

1. $\|x\| > 0 \;\Leftrightarrow\; x \neq 0$ (positive Definitheit)
2. $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ (Homogenität)
3. $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ (die Dreiecksungleichung)

$$\forall\, x, y \in V \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{K}$$

Ein VR mit einer Norm heißt normierter (Vektor-)Raum.

8.3 Skalarprodukt

Ein komplexes Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ eines VR V ist durch folgende Axiome festgelegt:

- $\langle \lambda u + v, w\rangle = \lambda\langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$
- $\langle u, w\rangle = \overline{\langle w, u\rangle} \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C},\ \forall u, v, w \in V$
- $\langle u, u\rangle > 0$ für $u \neq 0$

Ein komplexer (reeller) VR mit Skalarprodukt heißt unitär (euklidisch). Für ein reelles Skalarprodukt entfällt die komplexe Konjugation, woraus sich eine Symmetriebedingung ergibt.

8.4 orthogonale Projektion

$$P_{\vec{x}}(\vec{y}) := \frac{(\vec{x} \cdot \vec{y})}{\|\vec{x}\|^2} \cdot \vec{x}$$

heißt *orthogonale Projektion* bon $\vec{y}$ auf die Richtung $\vec{x}$

Projeziert man auf Ebenen, so müssen die Richtungsvektoren der Ebene bereits orthogonal zu einander sein.

8.5 Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren

Aus den Vektoren $\vec{a}_i$ kann man orthogonale Vektoren $\vec{b}_i$ gewinnen:

$$\vec{b}_1 = \vec{a}_1$$

$$\boxed{\vec{b}_n = \vec{a}_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle a_n, b_i\rangle}{\langle b_i, b_i\rangle}\, b_i}$$

8.6 Hesse Normalform

$\vec{r}$ beschreibe Punkte einer Ebene E

$$\boxed{\vec{r} \cdot \vec{n}_0 - d = 0} \qquad d \ge 0$$

Mit dem normierten Normalenvektor $\vec{n}_0$ von E, welcher vom Koordinatenursprung zur Ebene zeigt.
Setzt man einen beliebigen Punkt in $\vec{r}$ ein, so erhält man seinen Abstand zur Ebene.

8.7 Vektoridentitäten

Graßmann-Identität (bac-cab):

$$\boxed{\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})}$$

Jacobi-Identität:

$$\boxed{\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}}$$

Lagrange-Identität:

$$\boxed{(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{b} \cdot \vec{c})(\vec{a} \cdot \vec{d})}$$

9 Folgen

9.1 Beschränktheit

Eine komplexe Folge a_n heißt beschränkt

$$\Leftrightarrow \ \exists\, S \in \mathbb{R}: \ |a_n| \leq S \ \forall n$$

9.2 Häufungspunkt

$c \in \mathbb{C}$ heißt Häufungspunkt, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ für unendliche viele $n \in \mathbb{N}$ gilt: $|a_n - c| < \varepsilon$

Unbeschränkte Folgen besitzen den Häufungspunkt $(\pm)\infty$

9.3 Satz von Bolzano-Weierstrass

$\boxed{\text{Jede komplexe Folge besitzt einen Häufungspunkt!}}$

Nur 1 Häufungspunkt $\Rightarrow$ Grenzwert (Folge ist konvergent)

Eine monotone beschränkte Folge ist konvergent

9.4 Rechnen mit Grenzwerten

Die 2 Folgen a_n, b_n konvergieren gegen a, b. Dann gilt:

$$a_n \pm b_n \to a \pm b \qquad a_n \cdot b_n \to a \cdot b$$

$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b} \ (b \neq 0) \qquad f(a_n) \to f(a) \quad f \text{ stetig}$$

9.5 Leibniz-Kriterium

Vorr.: $a_n > 0$ $\quad a_n$ monoton fallend $\quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

$$\Rightarrow \sum_n^{\infty} (-1)^n a_n \quad \text{ist konvergent}$$

$$\text{Allgemein: } \sum_n^{\infty} a_n \text{ ist konvergent } \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

9.6 „Quetsch“-Lemma

Die Folgen a_n/b_n seien monoton wachsend/fallend

mit $a_n \leq b_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n - a_n = 0$

$$\Rightarrow \exists!\, x \in \mathbb{R} \text{ mit } a_n \leq x \leq b_n \forall n \text{ und } \lim_{n\to\infty} a_n = x = \lim_{n\to\infty} b_n$$

9.7 Eulersche Zahl e

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

9.8 Cauchy-Folge

Eine Folge a_n heißt Cauchyfolge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index N gibt, so dass ab diesem Index alle Folgenglieder weniger als ε voneinander entfernt sind:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists\, N \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq N : \ |a_m - a_n| < \varepsilon$$

In vollständigen Räumen konvergieren alle Cauchyfolgen. Konvegiert eine Folge, so ist es eine Cauchyfolge.

10 Reihen

Für Reihen gilt sinngemäß der Satz über Cauchy-Folge (9.8) und das Rechnen mit Grenzwerten (9.4).

10.1 Absolute Konvergenz

$$\sum_n^{\infty} a_n \text{ absolut konvergent} \Leftrightarrow \sum_n^{\infty} |a_n| \text{ konvergiert}$$

Diese Reihen sind unempfindlich gegen Umordnung.

(I.A. gilt weder das Kommutativ- noch das Assoziativgesetz bei Reihen)

10.2 Majorantenkriterium

$$|a_n| \leq c_n \forall n \text{ und } \sum_n^{\infty} c_n \text{ ist konvergent}$$

$$\Rightarrow \sum_n^{\infty} a_n \text{ ist absolut konvergent}$$

Minorantenkriterium analog für Divergenz.

10.3 Cauchy-Produkt

Das Cauchy-Produkt zweier absolut konvegenten Reihen konvergiert absolut:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}}$$

Der Grenzwert des Cauchyprodukt ist gleich dem Produkt der Grenzwerte.

Ist nur eine der Reihen absolut konvergent, konvergiert das Produkt i.A. nicht mehr absolut. Konvergieren beide Reihen nicht absolut, so muss das Produkt nicht konvergieren.

10.4 Wurzel-/ Quotientenkriterium

Man betrachte die Reihe $\sum\limits_n^{\infty} a_n$ als Potenzreihe $\sum\limits_n^{\infty} a_n x^n$ und untersuche, ob diese Potenzreihe für $x = 1$ konvergiert.
(vgl. Konvergenzradius: 13.4)

11 Exponentialfunktion

$\boxed{\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}}$ konvergiert absolut $\forall z \in \mathbb{C}$

exp ist stetig in jeden $z \in \mathbb{C}$.

12 Stetigkeit

12.1 Grenzwerte bei Funktionen

$\lim_{x \to a} f(x) := \lim_{n \to \infty} f(x_n)$ für bel. Folge mit $\lim_{n \to \infty} x_n = a$

Ist dies nicht eindeutig, existiert der Grenzwert nicht!

12.2 Stetigkeit

f heißt stetig in a, falls $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

f heißt stetig in einem Intervall I, falls f stetig in a $\forall a \in I$.

f, g stetig $\Rightarrow f + g, f \cdot g, \lambda f, \frac{f}{g}(g \neq 0), f \circ g$ stetig $\quad \lambda = c_\blacklozenge$
Der Vektorraum der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen auf dem Intervall I heißt $\mathcal{C}^k(I)$.

12.3 ε-δ-Definition

f ist in a stetig, genau dann wenn:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \Big(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \Big)}$$

12.4 Umkehrfunktionen

f stetig $\Rightarrow f^{-1}$ stetig $\qquad$ (sofern f^{-1} existiert)

12.5 Zwischenwertsatz

$$f \in \mathcal{C}^0([a, b]) \quad c \in [f(a), f(b)]$$
$$\Rightarrow x_0 \in [a, b] \text{ mit } f(x_0) = c$$

12.6 Beschränktheit

Auf einem geschlossenen beschränkten Intervall ist jede stetige Funktion beschränkt und besitzt Maxi- und Minimum.

13 Funktionenfolgen

13.1 Punktweise Konvergenz

Eine Funktionenfolge f_n konvergiert punktweise in z, falls die Grenzfunktion $\boxed{f(z) := \lim_{n \to \infty} f_n(z)}$ konvergiert.

Sie konvergiert punktweise in einem Intervall I, falls sie für alle $z \in I$ konvergiert.

13.2 Gleichmäßige Konvergenz

f_n konvergiert gleichmäßig auf I gegen f, falls

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0}$$

$$\|f_1 - f_2\|_\infty := \sup\Big(|f_1(x) - f_2(x)| \Big) \qquad x \in I$$

13.3 Majorantenkriterium

$$|f_n(z)| \leq c_n \forall n, \forall z \in I \text{ und } \sum_n^{\infty} c_n \text{ ist konvergent}$$

$$\Rightarrow \sum_n^{\infty} f_j(z) \text{ konvergiert gleichmäßig auf } I$$

13.4 Konvergenzradius r

Konv.-radius r einer Potenzreihe $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$.

$r = 0$: P konvergiert nur in $z = z_0$

$r > 0$ ($r = \infty$): P konvergiert absolut für $|z - z_0| < r$
P konvergiert gleichmäßig für $|z - z_0| \leq \rho$ (mit $\rho < r$)
P divergiert für $|z - z_0| > r$

Für $|z - z_0| = r$ kann nur die Aussage gemacht werden, dass bis dort Konvergenz und ab dort Divergenz herscht!

13.5 Wurzelkritierium

$$\boxed{r = \frac{1}{\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}} \qquad \frac{1}{\infty} = 0 \quad \frac{1}{0} = \infty$$

13.6 Quotientenkritierium

$$\boxed{r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|}$$

Achtung: $\quad a_n \neq 0 \, \forall n$ und Grenzwert muss eindeutig sein

13.7 „Geometrisches Kriterium“

Schreibt man eine Funktion in die Form $\frac{1}{1-x}$ und entwickelt über die geometrische Reihe die Potenzreihe, so erhält man den Konvergenzradius aus $|x| < 1$.

13.8 Identitätssatz

Sind die Potenzreihen von f und g gleich, so sind auch f und g gleich. (Und umgekehrt!)

14 Elementare Funktionen

14.1 Landau-Symbole

$$f(x) = o(g(x)) \text{ für } x \to x_0 \iff \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$f(x) = O(g(x)) \text{ für } x \to x_0 \iff \limsup_{x \to x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \infty$$

15 Differenzialrechnung einer Variablen in $\mathbb{R}$

15.1 Definition

f heißt in x_0 diff'bar, falls der folgende Grenzwert existiert:

$$\boxed{f'(x_0) := \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$$

15.2 Definition mit Fehlerterm

f ist in x_0 diff'bar $\Leftrightarrow \exists\ r$ stetig in x_0 mit $r(x_0)=0$

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + L(x-x_0) + r(x)(x-x_0) \quad \forall x}$$

L ist dann die Ableitung in x_0 $\qquad (L = c_\blacklozenge)$

15.3 Stetigkeit

Ist f diff'bar, so ist f stetig. (Die Umkehrung ist falsch!)

15.4 Umkehrfunktion

f ist stetig, bijektiv $\Rightarrow \exists\ g := f^{-1}$

$$g'(x_0) = \frac{1}{f'(g(x_0))} \qquad \text{falls } f' \neq 0 \text{ dort existiert}$$

15.5 Mittelwertsatz der DR

$g, f \in \mathcal{C}^0([a,b])$ und innerhalb diff'bar $\Rightarrow \exists\ x_0 \in (a,b)$:

$$\boxed{\Big[f(b)-f(a)\Big]\, g'(x_0) = f'(x_0)\, \Big[g(b)-g(a)\Big]}$$

für $g(x)=x$: $\quad \boxed{f'(x_0) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}}$

15.6 Taylorpolynom von $f(x)$ in x_0

$$\boxed{T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}$$

$f(x) = T_n(x) + R_n(x-x_0) \qquad f(x_0+h) = T_n(x_0+h) + R_n(h)$

$$\boxed{\Rightarrow \exists \vartheta \in (0{,}1) : R_n(h) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0+\vartheta h)\cdot h^{n+1}}$$

15.7 Extrempunkte, Wendepunkte

Ist $f^{(n)}(x_0)$ die erste nicht-verschwindende Ableitung in x_0 mit $n \geq 2$, so liegt bei n $\begin{matrix}\text{gerade}\\ \text{ungerade}\end{matrix}$ im Punkt x_0 ein $\begin{matrix}\text{Extrempunkt}\\ \text{Wendepunkt}\end{matrix}$ vor.

15.8 Potenzreihen

Ableitungen von absolut konvergenten Reihen können gliedweise gebildet werden. (Insbesondere alle Potenzreihen innerhalb des Konvergenzradius.)

15.9 Regel von L'Hospital

Gilt $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ und $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$

so folgt $\boxed{\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}}$,

falls der Grenzwert auf der rechten Seite existiert.

15.10 Fixpunktsatz von Banach

$$I = [a,b] \qquad f : I \to I \qquad f \in \mathcal{C}(I)$$

und $\exists\, q : 0 < q < 1$ mit $|f'(x)| \leq q \quad \forall x \in [a,b]$

Dann gilt: (q wird Lipschitz-Konstante genannt)

1. $\exists!\, \xi \in [a,b] : f(\xi) = \xi$
2. Die Folge $x_0 \in I$, $x_{n+1} = f(x_n)$ konvergiert gegen ξ.
3. Es gilt die Fehlerabschätzung:

$$|\xi - x_n| \underbrace{\leq \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}|}_{\text{aposteriori}} \underbrace{\leq \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|}_{\text{apriori}}$$

16 Integralrechnung einer Variablen in $\mathbb{R}$

16.1 Definition

Wenn Unter- und Obersummen über $[a,b]$ gegen denselben Wert s konvergieren, so existiert das Integral $s =: \int_a^b f(x)dx$

16.2 Integrierbarkeit

f monoton oder stetig auf $[a,b] \Leftrightarrow$ das Integral $\int_a^b f$ existiert

16.3 Zerlegungen

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n}$$

16.4 Mittelwertsatz der IR

$$g, f \in \mathcal{C}^0([a,b]) \quad f(x) \geq 0 \quad a \leq x \leq b \quad \Rightarrow \exists\, \xi \in (a,b):$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)g(x)dx = g(\xi)\int_a^b f(x)dx}$$

für $f(x) = 1$: $\boxed{\int_a^b g(x)dx = g(\xi)(b-a)}$

16.5 Partielle Integration

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[f(x)\cdot g(x)\Big]_a^b - \int\limits_a^b f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x}$$

16.6 Gebrochen rationale Funktion

Gesucht ist die Stammfunktion von $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

grad$(f) \geq$ **grad**(g)**:** Führe Polynomdivision mit Rest durch

grad$(f) <$ **grad**(g)**:** Berechne alle Nullstellen x_i samt deren Vielfachheiten n_i von $g(x)$.

$\Rightarrow$ Partialbruchzerlegung: $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \sum_i \left(\sum_{k=1}^{n_i} \dfrac{c_{i,k}}{(x-x_i)^k}\right)$

$\Rightarrow$ gliedweises Integrieren der Zerlegung:

16.7 Potenzreihen

Integrale von absolut konvergenten Reihen können gliedweise gebildet werden. (Insbesondere alle Potenzreihen innerhalb des Konvergenzradius.)

16.8 Uneigentliche Integrale

$$f \text{ definiert auf } [a,b): \int_a^b f(x)dx := \lim_{\beta\to b-}\int_a^\beta f(x)dx$$

$$f \text{ def. } [a,b]\setminus\{\gamma\}: \int_a^b f(x)dx := \int_a^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^b f(x)dx$$

16.9 Majorantenkriterium

Majoranten- und Minorantenkriterium analog zu Folgen und Funktionenreihen.

17 DGL

17.1 Lineare DGL 1. Ordnung

$$\boxed{y' + a(x)y = r(x)} \qquad A := \int a(x)dx$$

$$y_h = c\cdot\exp(-A) \qquad y_s = \exp(-A)\cdot\int r(x)\cdot\exp(+A)dx$$

17.2 Trennung der Variablen (TdV)

$$\boxed{y' = f(x)g(y)}$$

Das AWP ist eindeutig lösbar, falls $g(y) \neq 0 \forall y$ im Intervall.

$$g(y_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad y(x) = y_i = c_\blacklozenge \quad \text{ist Lösung}$$

17.3 Ähnlichkeits-DGL

$$\boxed{y' = f\left(\frac{y}{x}\right)}$$

$$\text{Substitution mit } u = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad y' = x\cdot u' + u = f(u)$$

17.4 Existenz und Eindeutigkeit

$$\boxed{y' = f(x,y) \qquad y(x_0) = y_0}$$

$$f: D \to \mathbb{R} \quad D_{\text{offen}} \subseteq \mathbb{R}^2 \quad (x_0, y_0) \in D$$

Peano: f stetig in D $\Rightarrow$ AWP lösbar

Picard-Lindelöf: f und $\partial_y f$ stetig $\Rightarrow$ AWP eindeutig lösbar

17.5 Picard-Iteration

Zusätzlich zu Picard-Lindelöf: $y: I \to \mathbb{R}$ stetig diff'bar und $x_0, x \in I$ (Mit Indizes: Iterationsformel; Ohne: Fixpunktgleichung)

$$y \text{ ist AWP-Lösung} \Leftrightarrow \boxed{y_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, y_k(\xi))d\xi}$$

Interation ergibt zumindest auf Teilintervall eine Lösung

17.6 Implizite DGL 1. Ordnung

$$\boxed{F(x,y,y') = 0}$$

1. Prüfe, ob $y'' = 0$ Lösung ist. ($y = ax + b$)
2. $y'' \neq 0$: Substituire $y = \chi(t); x = \Psi(t); y' = t$ mit Zusatzgl. $\dot{\chi}(t) = t\cdot\dot{\Psi}(t)$
   ($\dot{\Psi}(t) \neq 0 \Rightarrow$ Lösung ist eine Funktion $y(x)$)

17.7 Implizite DGL 2. Ordnung

$$\boxed{\Phi(y,y',y'') = 0}$$

1. Berechne $p(t)$ aus $\Phi(t, p(t), p(t)\dot{p}(t)) = 0$ wie in 17.6
   (Anfangswerte können schon bei $p(t)$ berücksichtigt werden)
2. Berechne $y(x)$ aus $y'(x) = p(y(x))$ mit TdV

17.8 Exakte DGL

$$\boxed{P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0}$$

Die DGL heißt exakt, falls $P_y = Q_x$

Lösung über $F(x,y) = c_\blacklozenge$ mit $F_x = P; F_y = Q; [F_t = 0]$

17.9 Integrierender Faktor

auch: Eulersche Multiplikator; nützlich, um 17.8 exakt zu machen

$$\mu = \mu(x) \quad \Rightarrow \quad \mu'(x) = \underbrace{\frac{P_y - Q_x}{Q}}_{\text{wenn: } a(x)} \mu(x)$$

$$\mu = \mu(y) \quad \Rightarrow \quad \mu'(y) = \underbrace{\frac{Q_x - P_y}{P}}_{\text{wenn: } b(x)} \mu(y)$$

$$\mu = \mu(\varphi(x,y)) \quad \Rightarrow \quad \mu'(\varphi) = \underbrace{\frac{Q_x - P_y}{\varphi_y P - \varphi_x Q}}_{\text{wenn: } h(\varphi(x,y))} \mu(\varphi)$$

17.10 Bernoulli-DGL

$$\boxed{y' + p(x)y = q(x)y^\alpha}$$

$$\text{Integrierender Faktor } \mu(x) = \exp \int^x p(t)dt$$

Und erkennen, dass links dann $(\mu(x)y(x))'$ steht.

17.11 Eulersche DGL

$$\boxed{x^2y'' + axy' + by = f(x)} \qquad a, b = c_\blacklozenge \quad (x <> 0)$$

$$\text{Substitution mit } x = \pm e^t \qquad u(t) = y(x)$$

$$\Rightarrow xy' = \dot{u} \qquad x^2y'' = \ddot{u} - \dot{u}$$

17.12 Riccati-DGL

$\boxed{y' + f(x)y = r(x) + g(x)y^2}$ mit bekannter Lösung $v(x)$

$$\text{Substitution mit } y = v + \frac{1}{u} \qquad y' = v' - \frac{u'}{u^2}$$

$$\text{ergibt lineare DGL: } \boxed{u' + (2vg - f)u = -g}$$

17.13 Lineare DGL 2. Ordnung

$$\boxed{y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x)}$$

$y_1(x)$ ist Lösung der homogenen Gleichung.

$\Rightarrow y_2(x) = v(x) \cdot y_1(x)$ ist spezielle Lösung falls

$$\boxed{v''(x) + v'(x)\left(\frac{2y_1'(x)}{y_1(x)} + p(x)\right) = \frac{f(x)}{y_1(x)}}$$

Der Lösungsraum $\mathcal{L}_{\text{hommogen}} = \mathcal{L}_0$ ist ein reeller Vektorraum der Dimension 2.

17.14 Fundamentalsystem

Eine Basis von $\mathcal{L}_0$ heißt Fundamentalsystem.

17.15 Wronski-Determinante

$$\boxed{w(x) = \det\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}} \quad \text{ist Wronski-Determinante}$$

Mit $y_1, y_2 \in \mathcal{L}_0 \quad \Rightarrow \quad w'(x) = -p(x)w(x)$.

17.16 Potenzreihenansatz

$$\boxed{y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(x - x_0)^j}$$

17.17 Abgewandelter Potenzreihenansatz

$$\boxed{y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(x - x_0)^{j+\rho}} \qquad c_0 \neq 0 \quad \rho \in \mathbb{R}$$

Bietet sich an, wenn die Koeffizienten singulär in x_0 sind.

17.18 Lemma von Cronwall

$$\varphi : [0, T > 0] \to \mathbb{R} \text{ stetig} \quad \alpha \in \mathbb{R}, \beta \geq 0$$

$$\text{Es gelte:} \quad \varphi(t) \leq \alpha + \beta \int_0^t \varphi(s)\mathrm{d}s \qquad \forall t \in [0, T]$$

$$\Rightarrow \text{ Dann gilt:} \quad \varphi(t) \leq \alpha \cdot e^{\beta t}$$

17.19 System von DGL erster Ordnung

$$\boxed{\vec{y}' = \vec{F}(x, \vec{y})}$$

Die Sätze von Picard-Lindelöf, Peano, Picard-Iteration etc. gelten entsprechend.
Lineare DGL höhere Ordnung lassen sich immer auf System erster Ordnung zurückführen.
$\Rightarrow$ Lineare DGL 2. Ordnung ist als AWP eindeutig lösbar.

17.20 Systeme linearer homogener DGL

$$\boxed{\vec{y}' = A(x)\vec{y}} \qquad \vec{y} \in \mathbb{R}^n \quad A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$$

Die Lösungsmenge $\mathcal{L}_0$ ist n-dimensinaler reeller Vektorraum.
Gibt es Basis v_k des $\mathbb{R}^n$ aus EV von A mit den EW $\lambda_k \in \mathbb{R}$, so ist ein Fundamentalsystem gegeben durch:

$$y_k(x) = v_k e^{\lambda_k x} \qquad k = 1, \ldots, n$$

Ist ein Eigenwerte λ komplex (und damit gibt es auch den komplex konjugierten Eigenwerte $\overline{\lambda}$), so sind

$$\mathrm{Re}\left(ve^{\lambda x}\right) \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}\left(ve^{\lambda x}\right) \quad \text{linear unabhängige Lösungen.}$$

Im allgemein Fall gibt es ein FS, bestehend aus Funktionen

$$\mathrm{Re}\left(e^{\lambda_j x} p_j(x)\right) \qquad \mathrm{Im}\left(e^{\lambda_j x} p_j(x)\right)$$

wobei p_j ein geeignetes Polynom in x mit komplexen Koeffizienten ist.

17.21 Stabilität

$\rightsquigarrow$ S. 140/141 (Meyberg/Vachenauer HM2)

18 Fourierreihen

18.1 periodische Funktionen

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt p periodisch, falls $f(x+p) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$.

18.2 Trigonometrische Polynome

$$T_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k \underbrace{e^{ikt}}_{=:e_k(t)} \qquad N \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}, c_k \in \mathbb{C}$$

heißt trigonometrisches Polynom des Grades N.
(Trigonometrische Reihe für $N \to \infty$)

$$T_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k\, e^{ikt} = c_0 + \sum_{k=1}^{N} \left(c_k\, e^{ikt} + c_{-k}\, e^{-ikt}\right)$$

$$= c_0 + \sum_{k=1}^{N} \left((c_k + c_{-k}) \cos kt + i(c_k - c_{-k}) \sin kt\right)$$

$$T_n(t) \in \mathbb{R} \leftrightarrow c_k = \bar{c}_{-k}\ \forall k$$

18.3 2π-Periodische Funktionen

V sei die Menge der 2π-periodischen beschränkten Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, die im Periodenintervall $[-\pi, \pi]$ höchstens endlich viele Unstetigkeiten 1. Art (=endlicher Sprung) haben.

V ist ein komplexer Vektorraum, dessen Elemente alle integrierbar sind.

18.4 Skalarprodukt auf V

$$f, g \in V \qquad \boxed{\langle f, g\rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt}$$

Damit ist V ein unitärer Vektorraum.

$$\langle e_k, e_j\rangle = \delta_{kj} \Rightarrow \text{ Die } e_i(t) \text{ bilden ein ONS}$$

18.5 Norm auf V

$$\boxed{\|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f\rangle} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{f(t)}dt}}$$

18.6 Gleichmäßige Konvergenz

Konvergiert $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e_k(t)$ gleichmäßig auf $[-\pi, \pi]$ gegen f, so gilt: f ist stetig, 2π-periodisch und $c_k = \langle f, e_k\rangle$.

18.7 Fourierreihen

Fourierkoeffizient: $\hat{f}(k) := \langle f, e_k\rangle \quad k \in \mathbb{Z}$

Fourierreihe von f: $(Ff)(t) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)\, e_k(t)$

Fourierreihe konvegiert gleichmäßig $\Rightarrow$ $(Ff)(t) = f(t)$.

18.8 Besselsche Ungleichung

$$\text{Für } f \in V \text{ gilt:} \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}(k)\right|^2 \leq \|f\|_2^2$$

$$\text{Gleichheit} \Leftrightarrow \underbrace{\text{Fourrierreihe von } f \text{ konvergiert gegen } f}_{\text{in der } \|\cdot\|_2\text{-Norm}}$$

18.9 Identitätssatz

Sind die Fourierreihen von f und g gleich, so sind auch f und g gleich. (Und umgekehrt!)

18.10 Punktweise Konvergenz der Fourierreihe

Bei Sprungstellen konvergiert die Fourierreihe gegen den Mittelwert aus rechts- und linksseitigem Grenzwert, sofern sowohl eine rechts- und linksseitige Ableitung existiert.
(d.h. es gibt nur einen endlicher Sprung)

19 Lineare Algebra

19.1 Schreibweisen

$\text{Lin}(v_1, ..., v_k) = \text{span}(v_1, ..., v_k) = [v_1, ..., v_k] :=$
Menge aller Linearkombinationen aus $v_1, ..., v_k$

ONS: Orthonormalsystem

19.2 Gruppen

Ein Paar $(G, \circ)$ mit einer Menge G und einer ***inneren*** Verknüpfung $\circ$ heißt Gruppe, falls:

- Assoziativität: $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \qquad \forall a, b, c \in G$
- Neutrales Element: $\exists e \in G : a \circ e = e \circ a = a \quad \forall a \in G$
- Inverses Elem.: $\exists a^{-1} : a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e \quad \forall a \in G$

Eine Gruppe heißt abelsch oder kommutativ, wenn die Verknüpfung kommutativ ist: $\qquad a \circ b = b \circ a \qquad \forall a, b \in G$
Die Inversen und das Neutrale Element sind eindeutig.

19.3 Basis vom VR V

$\{v_1, ..., v_n\}$ sind Basis von V, falls

1. $v_1, ..., v_n$ linear unabhängig
2. $\text{Lin}(v_1, ..., v_k) = V$

Die Darstellung eines beliebigen Vektors als Linearkombination von Basisvektoren ist eindeutig.

19.4 Dimension

Die Dimension eines Vektorraums ist gleich der Mächtigkeit der Basis.

19.5 Standardbasis

$\{\vec{e_1}, ..., \vec{e_n}\}$ heißt Standardbasis oder Kanonische Basis.

19.6 Cauchy-Schwarz Ungleichung

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein unitärer Vektorraum: $a, b \in V$

$$\boxed{|\langle a, b\rangle| \leq \|a\| \cdot \|b\|}$$

19.7 Lineare Abbildungen

V, W seien VR. Die Funktion $f : V \to W$ heißt linear, wenn:

$$\boxed{f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2)} \quad \forall \alpha_i \in \mathbb{C} \quad \forall v_i \in V$$

$\mathcal{L}(V, W)$ bezeichnet die Menge aller linearer Funktionen von V nach W.
Eine Matrix A kann als lineare Abbildung verstanden werden mit $f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$ ($\vec{x}$ hat eine Basis)

19.8 Isomorphismus

$f \in \mathcal{L}(V, W)$ sei bijektiv. Dann ist f ein Isomorphismus und die Vektorräume V und W sind isomorph. (d.h. sie sind von der Struktur her gleich)

19.9 Matrizen (Schreibweisen)

$\overline{A}$: Alle Elemente sind komplex konjugiert

A^T: transponieren: Die Matrix wird an der Diagonalen gespiegelt.

A^*: Adjugierte Matrix: $A^* := \overline{A}^T = \overline{A^T}$

$A = A^*$: Die Matrix heißt hermitsch.

$A = A^T$: Die Matrix heißt symmetrisch.

$A = -A^T \in \mathbb{R}^{(m,m)}$: Die Matrix heißt schiefsymmetrisch.

$\det A \neq 0$: Die Matrix heißt regulär.

19.10 Rang einer Matrix

Der Rang einer Matrix bezeichnet die Anzahl der linear unabhängigen Spalten/Zeilen der Matrix.
(Bemerkung: Zeilenrang = Spaltenrang)

19.11 Lineare Gleichungssysteme

$$\boxed{A\vec{x} = \vec{y} \text{ ist lösbar} \Leftrightarrow \vec{y} \in \text{Bild}(A) \Leftrightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A, \vec{y})}$$

Eindeutig lösbar, falls der Rang von A maximal ist!

19.12 Transpositionen

Transpositionen vertauschen zwei Objekte (Zahlen).

19.13 Permutationen

S_n ist die Menge aller Permutationen der Zahlen 1,2, ..., n.

Jede Permutationen lässt sich als Produkt von vielen Transpositionen schreiben. Das Vorzeichen der Permutation ist $(-1)^n$, wenn n die Anzahl der Transpositionen ist.

19.14 Eigenschaften der Determinate

1. sie ist multilinear, d.h. linear in jeder Spalte
2. sie ist alternierend, d.h. das Vertauschen zweier Spalten ändert gerade das Vorzeichen
3. sie ist normiert, d.h. die Einheitsmatrix hat die Determinante 1

19.15 Definition der Determinate

Nach der Leibniz-Formel ist die Determinante:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} \right)$$

19.16 Laplacescher Entwicklungssatz

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det A_{ij}$$

wobei A_{ij} die Untermatrix von A ist, die durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht.
(Statt über i kann auch über j summiert werden.)

19.17 Rechnen mit Determinaten

Produktregel:

$$\boxed{\det(AB) = \det A \cdot \det B} \quad \forall n \times n\text{-Matrizen } A \text{ und } B.$$

Inverse:

Falls A invertierbar ist, dann ist $\det\left(A^{-1}\right) = \det\left(A\right)^{-1}$.

Transponierte Matrix: Eine Matrix und ihre Transponierte haben dieselbe Determinante.

19.18 Adjunkte ($\neq$ Adjungierte)

$$\boxed{\left(\text{adj}(A)\right)_{i,j} := (-1)^{j+i} \cdot \det A_{j,i}}$$

Man beachte, dass die Indizes von $A_{j,i}$ gedreht sind.

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)}$$

19.19 Gramersche Regel

Falls das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{y}$ eindeutig lösbar ist:

Lösung $\vec{x}$ gegeben durch: $\boxed{x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}}$ $\quad \det(A) \neq 0$

Die Matrix A_i entsteht aus A, indem man die i-te Spalte durch $\vec{y}$ ersetzt.

19.20 Orthogonale Matrizen

A orthogonal $\overset{\text{Def.}}{\longleftrightarrow}$ $A^T = A^{-1} \leftrightarrow A^T$ orthogonal $\leftrightarrow A^{-1}$ orthogonal $\leftrightarrow$ Spalten bilden ONS $\leftrightarrow$ Zeilen bilden ONS $\leftrightarrow$ Ist $\vec{b_1}, ..., \vec{b_n}$ ein ONS, so ist $A\vec{b_1}, ..., A\vec{b_n}$ ein ONS

19.21 Eigenwert (Definition)

λ heißt Eigenwert (EW) von $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$, falls die Gleichung $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ Lösungen $\vec{x} \neq 0$ besitzt. Diese $\vec{x}$ heißen Eigenvektor (EV) zum EW λ.

$$\boxed{\lambda \text{ ist EW von } A \longleftrightarrow \underbrace{\det(A - \lambda E) = 0}_{\text{Nullstellen des charakteristischen Polynom}}}$$

Die Vielfachheit der Nullstelle im charakteristischen Polynom heißt *algebraische Vielfachheit* m des Eigenwertes.

Die EV zu verschiedenen EW sind linear unabhängig.

19.22 Eigenraum

Eigenraum zu λ: $\quad \mathrm{Eig}(\lambda) := \mathrm{Kern}(A - \lambda E)$

$$\gamma := \dim \mathrm{Eig}(\lambda) := n - \mathrm{Rang}(A - \lambda E) \qquad A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$$

Mit der *geometrische Vielfachheit* γ

19.23 Der Eigenwert 0

$$A \text{ singulär} \leftrightarrow \exists \text{ EW } \lambda = 0$$

$$A \text{ regulär} \leftrightarrow \lambda \neq 0 \; \forall \text{ EW } \lambda$$

19.24 Ähnliche Matrizen

$A, B \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ heißen *ähnlich*, falls:

$$\exists \text{ reguläres } C \in \mathbb{C}^{(n,n)} : B = C^{-1}AC$$

Ähnliche Matrizen besitzen die selbe Spur, Determinate und EW.

19.25 Diagonalisierbar

Ein Matrix $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ heißt diagonalisierbar, wenn sie zu einer Diagonalmatrix D ähnlich ist.

$$A \text{ besitze } n \text{ linear unabh. EV } \vec{v_i} \Rightarrow D = C^{-1}AC$$

$$\text{mit } C = (\vec{v_1}, ..., \vec{v_n})$$

19.26 Hermitsche Matrizen

$$A = A^* \in \mathbb{C}^{(n,n)}$$

1. Alle EW sind reell
2. A hat n orthonormale EV
3. A ist diagonalisierbar mit einer unitären Matrix C

$$D = C^*AC \qquad \text{da: } C^{-1} = C^*$$

Ist A sogar symmetrisch, so lässt sie sich mit einer orthogonale Matrix C diagonalisieren.

Wichtig: Die EV müssen dabei orthonormiert werden

19.27 Definitheit von Matrizen

$A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$, $A = A_1 + A_2$ mit $A_{1(2)}$ (schief-)symmetrisch

Jede reelle Matrix lässt sich in eine symmetrische und eine schiefsymmetrische Teilmatrix aufspalten.
A **heißt...**

...positiv definit, falls $\vec{x}^T A\vec{x} > 0 \forall \vec{x} \leftrightarrow$ Alle EW positiv

...positiv semidefinit, falls $\vec{x}^T A\vec{x} \geq 0 \forall \vec{x} \leftrightarrow$ Alle EW positiv oder Null

...negativ (semi)definit, falls $-A$ positiv (semi)definit

...indefinit, falls $\exists \vec{u}, \vec{v} : \vec{u}^T A\vec{u} > 0$ und $\vec{v}^T A\vec{v} < 0 \leftrightarrow$ Es gibt positive und negative EW

Da $\vec{x}^T A_2 \vec{x} = 0$, falls A_2 schiefsymmetrisch ist, *kann* man sich auf den symmetrischen Teil der Matrix beschränken.
Für die Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2,2)}$ gilt:

- positiv definit, falls $a > 0$ und $ac - b^2 > 0$
- positiv semidefinit, falls $a + c > 0$ und $ac - b^2 = 0$
- negativ definit, falls $a < 0$ und $ac - b^2 > 0$
- indefinit, falls und $ac - b^2 < 0$

19.28 Quadrik (Kegelschnitte)

Die Menge $\{\vec{x} | h(\vec{x}) = 0\}$ heißt Quadrik, wenn $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; $\boxed{x \mapsto \vec{x}^T A\vec{x} + 2\vec{b}^T \vec{x} + c}$. Dabei kann A immer als symmetrisch angenommen werden.

19.29 Transformation (Quadrik)

Die Funktion $h(\vec{x}) = \vec{x}^T A\vec{x} + 2\vec{b}^T \vec{x} + c$ lässt sich durch Transformation $\vec{x} \mapsto C\vec{x} + \vec{m}$ in eine der folgenden Normalformen bringen:

1. $h(\vec{x}) = \vec{x}^T D\vec{x} + c_0$, mit Diagonalmatrix D, falls A vollen Rang hat
2. $h(\vec{x}) = \vec{x}^T D\vec{x} + 2\vec{b_0}^T \vec{x}$, falls A nicht vollen Rang hat

Dies geschieht durch Diagonalisieren der Matrix A mit Hilfe einer orthogonalen Matrix C und anschließendem Verschieben um $\vec{m}$.

19.30 Formen (Quadrik)

Man betrachte, die Eigenwerte der Diagonalmatrix (in der Normalform): $\rightsquigarrow$ S. 32 (Formel und Hilfen zur HM)

20 DR mehrerer Variablen

20.1 offenen Gebiete

$D \subset \mathbb{R}^n$ heißt offen, falls zu jedem Punkt in D eine Umgebung existiert, die ganz in D liegt.

20.2 Stetigkeit, Diff'bar

$\vec{f}$ ist stetig (oder diff'bar), falls jede Komponentenfunktion f_j stetig (oder diff'bar) ist.
(Achtung: Es gibt mehr als zwei Richtungen im $\mathbb{R}^n$)

20.3 Kurven

Eine Kurve im $\mathbb{R}^n$ ist eine stetige Funktion $\vec{r} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$
$\vec{(r)}(I) = \text{Bild}(\vec{(r)})$ heißt Spur oder Trajektorie
Zu einer Kurve gehört immer eine Orientierung.

Eine Kurve heißt

geschlossen, wenn Anfangspunkt und Endpunkt gleich sind.

doppelpunktfrei oder einfach, wenn sie keine Doppelpunkte (Punkte, die mehrmals erreicht werden) besitzt.

Jordankurve oder einfach geschlossen, falls sie geschlossen ist, und der Anfangs- und Endpunkt der einzige Doppelpunkt ist.

glatt oder regulär, falls der Tangetialvektor $\dot{\vec{r}}(t) \neq 0 \; \forall t$

20.4 Bogenlänge

Das Supremum der beschränkten Menge aller Sehnenpolygone (der Kurve) heißt Länge L der Kurve. Falls diese Menge beschränkt ist, heißt die Kurve rektifizierbar. Ist die Menge nicht beschränkt, ist die Länge nicht definiert.

Jede $\mathcal{C}^1$-Kurve $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ $(a, b \neq \pm\infty)$ ist rektifizierbar.

Es gilt: $\boxed{L(\vec{r}) := L_b^a(\vec{r}) := \int_a^b \|\dot{\vec{r}}(t)\| dt}$

Diese Länge ist unabhängig von der gewählten Darstellung der Kurve. (Umparametrisierung)

20.5 Richtungsableitung

$f : D_{\text{offen}} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ skalares Feld $\quad \vec{x}_0 \in D$ fest $\quad \vec{v} \in \mathbb{R}^n \neq 0$

Existiert $\boxed{(D_{\vec{v}} f)(\vec{x}_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + h\vec{v}) - f(\vec{x}_0)}{h}}$, so heißt dieser Limes Richtungsableitung von f in $\vec{x}_0$ in Richtung $\vec{v}$.
Für ein Vektorfeld gilt dies komponentenweise (vgl. 20.2).

20.6 partielle Ableitung

$\boxed{D_j := D_{\vec{e}_j}}$ heißt partielle Ableitung nach der j-ten Variablen. (Mit dem Standardbassisvektor $\vec{e}_j$)

20.7 Jakobi- / Funktionalmatrix J

$$\vec{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

$$\boxed{J_{\vec{f}} = (J\vec{f}) = \frac{\partial(\vec{f_1}, ..., \vec{f_n})}{\partial(\vec{x_1}, ..., \vec{x_m})} := (D_k f_j)_{j,k} \in \mathbb{R}^{(n,m)}}$$

Für $m = n$ heißt $\det J_{\vec{f}}$ Funktionaldeterminante.

20.8 Schwarzsche Satz

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$ zweimal *stetig* partiell differenzierbar, dann gilt:

$$\boxed{D_j D_k f = D_k D_j f} \qquad \forall\, j, k$$

20.9 Nabla-Identitäten

Für die Vektorfelder $\vec{f}$ und $\vec{g}$ gilt:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{f}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{f}) - \Delta\vec{f}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{f} \times \vec{g}) = \vec{g} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{f}) - \vec{f} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{g})$$

$$\vec{\nabla}(\vec{f} \cdot \vec{g}) = (\vec{f} \cdot \vec{\nabla})\vec{g} + (\vec{g} \cdot \vec{\nabla})\vec{f} + \vec{f} \times (\vec{\nabla} \times \vec{g}) + \vec{g} \times (\vec{\nabla} \times \vec{f})$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{f} \times \vec{g}) = (\vec{g} \cdot \vec{\nabla})\vec{f} - \vec{g}(\vec{\nabla} \cdot \vec{f}) + \vec{f}(\vec{\nabla} \cdot \vec{g}) - (\vec{f} \cdot \vec{\nabla})\vec{g}$$

20.10 Ableitung

$\vec{f}$ ist in $\vec{x}_0$ diff'bar $\Leftrightarrow \exists\, \vec{R}$ stetig in $\vec{0}$ mit $\vec{R}(\vec{0}) = \vec{0}$

$$\boxed{\vec{f}(\vec{x}_0 + \vec{h}) = \vec{f}(x_0) + \vec{L}(\vec{h}) + \vec{R}(\vec{h})\|\vec{h}\| \qquad \forall \vec{h}}$$

Die Lineare Abbildung $\vec{L}$ heißt Differential von $\vec{f}$ in $\vec{x}_0$

Die (n, m)-Matrix, die $\vec{L}$ bzgl. der Standardbassis zugeordnet ist, wird durch $\vec{f}'$ bezeichnet. Diese Matrix heißt die Ableitung von $\vec{f}$ in $\vec{x}_0$.

Die Richtungsableitung lässt sich damit ausdrücken als:

$$\boxed{(D_{\vec{v}}\vec{f})(\vec{x}) = \vec{f}'(\vec{x})\,\vec{v}}$$

20.11 Stetig vs. Diff'bar

Ist $\vec{f}$ diff'bar, so ist $\vec{f}$ stetig.

Ist $\vec{f}$ *stetig* partiell diff'bar, so ist $\vec{f}$ diff'bar.

Aus der Existenz aller Richtungsableitungen in einem Punkt folgt nicht die Stetigkeit in diesem Punkt.

20.12 Tangentialebenen

Die Fläche $F \subset \mathbb{R}^3$ sei implizit durch $f(x,y,z) = c$ gegeben. (f diff'bar, $f' = \nabla f \neq \vec{0}$)
Dann ist die Tangentialebenen an $\vec{p}$ gegeben durch:

$$\boxed{(\vec{r}-\vec{p})^T \nabla f(\vec{p}) = 0}$$

20.13 Taylorformel

$f : D_{\text{offen}} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^k(D)$, die partiellen Ableitungen der $(k+1)$-ten Ordnung sollen existieren.
Dann gibt es für alle $x \in D$ ein $\vec{z} \in S_{x_0,x}$, falls

$$S_{x_0,x} := \{x_0 + t(x - x_0) | t \in [0,1]\} \subset D$$

$$\boxed{f(\vec{x}) = \underbrace{\sum_{j=0}^{k} \frac{((\vec{x}-\vec{x}_0)\nabla)^j f(\vec{x}_0)}{j!}}_{T_k(f,\vec{x}_0)(\vec{x})} + \underbrace{\underbrace{\frac{((\vec{x}-\vec{x}_0)\nabla)^{k+1} f(\vec{z})}{(k+1)!}}_{R_k = o(\|\vec{x}-\vec{x}_0\|^k) \quad (\vec{x}\to\vec{x}_0)}}_{\text{Fehlerterm}}}$$

Mit $k = 0$ folgt der Mittelwertsatz der Differetialrechnung.

20.14 Hesse-Matrix

Mit der symetrischen Hesse-Matrix $H_f(\vec{x}_0)$ lässt sich die Taylorformel in 2. Ordnung wie folgt darstellen:

$$H_f(\vec{x}_0) = (D_l D_k f(\vec{x}_0))_{l,k=1,\dots n}$$

$$\boxed{f(\vec{x}) = \begin{array}{l} f(\vec{x}_0) + (\vec{x}-\vec{x}_0) \cdot \nabla f(\vec{x}_0) \\ + \frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{x}_0)^T H_f(\vec{x}_0)(\vec{x}-\vec{x}_0) + o(\|\vec{x}-\vec{x}_0\|^3) \end{array}}$$

20.15 Identitätssatz

Sind die Taylorreihen von f und g gleich, so sind auch f und g gleich. (Und umgekehrt!)

20.16 stationäre Punkte

Ein Punkt $\vec{x}_0$ heißt stationär/kritisch $\iff \nabla f(\vec{x}_0) = 0$

(f muss natürlich in $\vec{x}_0$ diff'bar sein.)

20.17 Extrempunkte, Sattelpunkte

Die Hessematrix H_f existiere im stationären Punkt $\vec{x}_0$ und in dessen Umgebung. Dann gilt:

$H_f(\vec{x}_0)$ **positiv definit:** isoliertes Minimum

$H_f(\vec{x}_0)$ **negativ definit:** isoliertes Maximum

$H_f(\vec{x}_0)$ **indefinit:** Sattelpunkt

$H_f(\vec{x}_0)$ **semidefinit:** keine allgemeine Aussage möglich

20.18 lokale Invertierbarkeit

Ist die Jakobimatrix $J_{\vec{f}}(\vec{x}_0)$ regulär, so ist $\vec{f}$ in $\vec{x}_0$ lokal invertierbar. Für die Ableitung gilt:

$$\boxed{D\vec{f}^{-1}(\vec{x}_0) = \left[D\vec{f}\left(\vec{f}^{-1}(\vec{x}_0)\right)\right]^{-1}}$$

Lokal bedeutet, dass es eine offene Umgebung (im Definitionsraum) gibt, für die das Bild ebenfalls eine offene Umgebung ist.

20.19 implizite Funktionen

$$\vec{f}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = \vec{0} \qquad \partial_{\vec{y}} f(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \text{ regulär}$$

Dann ist die Gleichung lokal nach $\vec{y}$ auflösbar: $\vec{y} = \vec{h}(\vec{x})$

$$\boxed{D_{\vec{x}}\vec{h}(\vec{x}) = -\left[\partial_{\vec{y}}\vec{f}\left(\vec{x}, \vec{h}(\vec{x})\right)\right]^{-1} \cdot \partial_{\vec{x}}\vec{f}\left(\vec{x}, \vec{h}(\vec{x})\right)}$$

21 IR mehrerer Variablen

21.1 Einführung

Im Folgenden sei G ein Gebiet (offen, zusammenhängend, beschränkt) und ∂G eine positiv orientierte stückweise glatte Randkurve und $\overline{G} = G \cup \partial G$ der Abschluss von G.
$\vec{v}$ immer ein Vektorfeld und f,g Skalarfelder und γ eine stückweise glatte Kurve.

21.2 Vertauschung der Integrationsreihenfolge

$$\text{Sei } f \in \mathcal{C}^0(\overline{G}) \qquad \overline{G} = [a,b] \times [c,d]$$

$$\Rightarrow \int_{x=a}^{b} \int_{y=c}^{d} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{y=c}^{d} \int_{x=a}^{b} f(x,y)\,dx\,dy$$

21.3 Gaußscher Satz in der Ebene

$G \in \mathbb{R}^2$ sei durch Schnitte in endliche viele in x- und y-Richtung projezierbare Gebiete zerlegbar.

$$\vec{v} : \overline{G} \to \mathbb{R}^2 \qquad \vec{v} \in \mathcal{C}^1(G) \cap \mathcal{C}^0(\overline{G})$$

$$\Rightarrow \boxed{\oint_{\partial G} \vec{v} \cdot \vec{\mathrm{d}s} = \iint_G (D_1 v_2 - D_2 v_1)\,\mathrm{d}(x,y)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\oint_{\partial G} (\vec{v} \cdot \vec{n})\,\mathrm{d}s = \iint_G \operatorname{div} \vec{v}\;\mathrm{d}(x,y)}$$

$\vec{n}$: äußerer Normalenvektor

21.4 Stokesscher Integralsatz in der Ebene

G und $\vec{v}$ wie bei Gauß (21.3), nur dass $\vec{v}:\overline{G}\to\mathbb{R}^3$.

$$\Rightarrow \boxed{\oint\limits_{\partial G} \vec{v}\cdot\vec{ds} = \iint\limits_{G} \left(\vec{\nabla}\times\vec{v}\right)\cdot\vec{e}_3\, d(x,y)}$$

21.5 1. Green'sche Formel

$g,f\in\mathcal{C}^2(G)\cap\mathcal{C}^1(\overline{G}), \vec{N}$ Normalenvektor zu G, $D_{\vec{a}}g = \vec{\nabla}g\cdot\vec{a}$

$$\Rightarrow \boxed{\int\limits_{\partial G} f\,\underbrace{D_{\vec{N}}g}_{\frac{\partial g}{\partial \vec{N}}}\,\mathrm{d}s = \int\limits_{G} (f\vec{\nabla}^2 g + \vec{\nabla}f\cdot\vec{\nabla}g)\,\mathrm{d}G}$$

21.6 2. Green'sche Formel

f und g vertauschen und die Gleichungen subtrahieren:

$$\Rightarrow \boxed{\int\limits_{\partial G} fD_{\vec{N}}g - gD_{\vec{N}}f\,\mathrm{d}s = \int\limits_{G} (f\vec{\nabla}^2 g - g\vec{\nabla}^2 f)\,\mathrm{d}G}$$

21.7 Potentialfelder

$\vec{v}$ heißt Potentialfeld/Gradientenfeld/konservatives Feld, falls es ein diff'bares Skalarfeld f gibt mit:

$$\boxed{\vec{v}=\vec{\nabla}f} \qquad f \text{ heißt dann Potential}$$

Ein Potential ist bis auf eine additive Konstante eindeutig. Die Jakobimatrix von eines stetig diff'baren Potentialfeldes ist symmetrisch.

$$\int\limits_{\gamma(\vec{r}_0\ldots\vec{r}_1)} \vec{v}\cdot\vec{ds} = f(\vec{r}_1) - f(\vec{r}_0)$$

(1. Hauptsatz für Kurvenintegrale)
$\vec{v}$ ist Potentialfeld $\leftrightarrow$ für je 2 Punkte ist $\int_\gamma \vec{v}\cdot\vec{ds}$ unabhängig von der die Punkte verbindende Kurve $\gamma \leftrightarrow \oint_\gamma \vec{v}\vec{ds} = 0\,\forall\gamma$

21.8 einfach zusammenhängend

Ein Gebiet G heißt einfach-zusammenhängendes Gebiet, falls sich jede einfach geschlossene Kurve innerhalb von G auf einen Punkt stetig zusammenziehen lässt.

21.9 2. Hauptsatz für Kurvenintegrale

Sei $G\subset\mathbb{R}^n$ einfach zusammenhängend und $\vec{v}:G\to R^n$ ein $\mathcal{C}^1$-Vektorfeld.

$$\boxed{\vec{v}\text{ ist Potentialfeld} \quad\Leftrightarrow\quad D_j v_k = D_k v_j\ \forall j,k}$$

21.10 Normalenvektor

Der Gradient steht immer senkrecht auf den Nivealinien eines Skalarfeldes.
$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}F(\vec{x})}$ ist ein (nicht normierter) Normalvektor auf die Fläche, die durch $F(\vec{x}) = c_\blacklozenge$ gegeben ist.

21.11 Oberflächenintegrale im $\mathbb{R}^3$

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{o} = D_1\vec{r}(u,v)\times D_2\vec{r}(u,v)\,\mathrm{d}(u,v)}$$

heißt vektorielles Oberflächenelement

$\mathrm{d}o = \|\mathrm{d}\vec{o}\|$ heißt skalares Oberflächenelement

21.12 mehrdimensinale Variablentransformation

Gegeben sei eine Parametertransformation: $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} = \psi\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}$

$$\mathrm{d}(u,v) = \left|\det\left(J_{\vec{\psi}}(\xi,\eta)\right)\right|\mathrm{d}(\xi,\eta)$$

21.13 Stokesscher Integralsatz

Sei F eine stückweise glatte, orientierte (!) Fläche.
$\vec{v}\in\mathcal{C}^1(\overline{G}):\overline{G}\to\mathbb{R}^3$

$$\Rightarrow \boxed{\iint\limits_{F}\left(\vec{\nabla}\times\vec{v}\right)\mathrm{d}\vec{o} = \oint\limits_{\partial F}\vec{v}\cdot\vec{ds}}$$

21.14 Gaußscher Integralsatz

$G\in\mathbb{R}^3$ sei durch Schnitte in endliche viele in x-, y- und z-Richtung projezierbare Gebiete zerlegbar. Die Oberflächen ∂G seien stückweise glatt und orientierbar. $\vec{N}$ seit der nach außen orientierte Normalenvektor.

$$\vec{v}:\overline{G}\to\mathbb{R}^3 \qquad \vec{v}\in\mathcal{C}^1(\overline{G})$$

$$\Rightarrow \boxed{\oint\!\!\!\oint\limits_{\partial G}\vec{v}\cdot\vec{N}\,\mathrm{d}o = \iiint\limits_{G}\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\ \mathrm{d}(x,y,z)}$$

22 Funktionentheorie

22.1 Stetigkeit

$$\text{Stetig in } z_0 \Leftrightarrow \lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$$

22.2 Komplex diff'bar

$$\text{Komplex diff'bar in } z_0 \Leftrightarrow \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \text{ existiert}$$

Dieser Grenzwert heißt komplexe Ableitung $f'(z_0)$.

22.3 holomorph

f ist holomorph $\Leftrightarrow$ f ist auf offenen Gebiet definiert und komplex diff'bar

Im Folgenden werden praktisch fast nur holomorphe Funktionen behandelt. (Auch wenn's oft nicht dabei steht.)

22.4 holomorphe Ableitung

$$\boxed{f : D \to \mathbb{C} \text{ holomorph} \quad \Rightarrow \quad f' : D \to \mathbb{C} \text{ holomorph}}$$

22.5 Cauchy-Riemann DGL

$f(z = x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ ist komplex diff'bar falls:

- $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$ oder
- $f_x = -if_y$ oder $f_z = f_x$ oder $f_{\overline{z}} = 0$

22.6 Harmonisch

f ist harmonisch $\Leftrightarrow \triangle f = u_{xx} + u_{yy} + i(v_{xx} + v_{yy}) = 0$

Nach dem Satz von Schwarz folgt für holomorphe Funktionen, dass sie harmonisch sind.

22.7 Holomorphe Ergänzung

Ist D offen, einfach zusammenhängend und $u : D \to \mathbb{R}$ harmonisch in D, sogibt es eine harmonische Funktion $v : D \to \mathbb{R}$, sodass $f := u + iv$ in D holomorph ist.

v heißt zu u konjugiert harmonisch

22.8 Jacobimatrix

$$|\det J_f| = \left|\det \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}\right| = |f'(x + iy)|^2 \quad \text{mit } f' = u_x + iv_x$$

22.9 Schlicht

schlicht = holomorph + injektiv (plakativ!)

$$g'(x_0) = \frac{1}{f'(g(x_0))} \qquad \text{falls } g := f^{-1} \quad f' \neq 0$$

Manchmal nennt man solche Funktionen auch simpel oder einfach.

22.10 Flächeninhalt

Ist f schlicht, dann ist die Fläche von $f(D)$:

$$\text{Fläche}(f(D)) = \iint_D |f'(x + iy)|^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

22.11 Flächen

$$\alpha \in \mathbb{R} \qquad S_\alpha := \{z \in \mathbb{C} : \alpha < \mathrm{Im} z < \alpha + 2\pi\}$$

$$\alpha \in [-\pi, \pi) \qquad E_\alpha := \{r \cdot e^{i\varphi} \in \mathbb{C} : r \in \mathbb{R}_+, \varphi \in (\alpha, \alpha + 2\pi)\}$$

E_α ist die bei $e^{i\alpha}$ geschlitzte Ebene

Kreisscheibe: $K(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$

Kreisring: $A(z_0, r, R) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$

$r, R \in \hat{\mathbb{C}} \cup \{0\}$

22.12 Argument

(Neben)zweig: $\arg_\alpha : E_\alpha \to (\alpha, \alpha + 2\pi)$

Hauptzweig: $\mathrm{Arg} := \arg_{-\pi} : E_{-\pi} \to (-\pi, \pi)$

22.13 Natürlicher Logarithmus

Für (Neben)zweig log und Hauptzweig Log gilt ($k \in \mathbb{Z}$):

$$\log_{k,\alpha} : E_\alpha \to \mathbb{C} \quad \log_{k,\alpha}(z) = \ln|z| + i(\arg_\alpha(z) + 2\pi k)$$

$$\mathrm{Log} : E_{-\pi} \to \mathbb{C} \quad \mathrm{Log} := \log_{0,-\pi} = \ln|z| + i\mathrm{Arg}(z)$$

22.14 Rechnen

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\} \qquad \exp(S_\alpha) = E_\alpha$$

$$\log_{k,\alpha}(E_\alpha) = S_{\alpha + 2\pi k}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \exp(\log_{k,\alpha}(z)) = z \quad \forall z \in E_\alpha \\ \log_{k,\alpha}(\exp(z)) = z \quad \forall z \in S_{\alpha+2\pi k} \end{array}}$$

Wurzeln, Potenzen: $\boxed{z^a := e^{a \cdot \log z}}$ mehrdeutig, falls $a \notin \mathbb{R}$

22.15 Verallgemeinerte Kreise

Verallgemeinerte Kreise werden in $\mathbb{C}$ beschrieben durch:

$$\boxed{\alpha|z|^2 + \beta z + \overline{\beta z} + \gamma = 0} \qquad \alpha, \gamma \in \mathbb{R} \quad \beta \in \mathbb{C} \quad \alpha\gamma < |\beta|^2$$

$\gamma = 0 \Rightarrow$ durch 0 $\qquad \alpha = 0 \Rightarrow$ Gerade

$$\alpha \neq 0 \Rightarrow \left|z + \frac{\overline{\beta}}{\alpha}\right|^2 = \frac{|\beta|^2}{\alpha} - \frac{\gamma}{\alpha} \Rightarrow \text{Kreis}$$

22.16 Stereographische Projektion

$$\pi : \hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \underbrace{S}_{\text{Kugel}}$$

$$\pi(z) = \begin{cases} \left(\dfrac{2\mathrm{Re} z}{|z|^2 + 1}, \dfrac{2\mathrm{Im} z}{|z|^2 + 1}, \dfrac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}\right) & z \in \mathbb{C} \\ (0, 0, 1) & z = \infty \end{cases}$$

$$\pi^{-1}(\xi, \eta, \zeta) = \begin{cases} \dfrac{\xi + i\eta}{1 - \zeta} & \zeta \neq 1 \\ \infty & \zeta = 1 \end{cases}$$

Verallgemeinerte Kreise in $\hat{\mathbb{C}}$ gehen auf Kreise in S.

22.17 Konforme Abbildungen

konform = holomorph + $f'(z) \neq 0 \; \forall z$ (plakativ!)

schlicht $\Rightarrow$ konform $\Rightarrow$ <u>lokal</u> schlicht

konforme Abbildungen...

- sind winkeltreu
- bilden Gebiete auf Gebiete ab
- bilden deren Ränder auf Ränder ab
- sind orientierungstreu
- G, H seien einfach zusammenhängende Gebiete

  $\Rightarrow \exists$ schlichtes/konformes/bijektives $f : \quad f(G) = H$

22.18 Möbiustransformation

Eine Möbiustransformation ist eine konforme Abbildung:

$$\boxed{f(z) = \frac{az+b}{cz+d}} \qquad a,b,c,d \in \mathbb{C} \quad ad-bc \neq 0$$

$$f(\infty) := \frac{a}{c} \qquad f\left(-\frac{d}{c}\right) := \infty$$

Eine MT erhält das Doppelverhältnis:

$$\boxed{\frac{w_1-w_2}{w_1-w_4}\frac{w_3-w_4}{w_3-w_2} = \frac{z_1-z_2}{z_1-z_4}\frac{z_3-z_4}{z_3-z_2}} \qquad w_k = f(z_k)$$

MT bilden eine Gruppe mit $f = f_1 \circ f_2$.

Jede MT lässt sich als Hintereinanderschaltung von Intertierung, Drehstreckung und Translation darstellen.

22.19 Kurvenintegrale

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)\mathrm{d}t = \int_\gamma (u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y) + i(v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y)$$

γ: Kreis um a; l-mal mathematisch positiv durchlaufen

$$\int_\gamma (z-a)^k \mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi i \cdot l & k=-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

22.20 Cauchy Integralsatz

G sei einfach zusammenhängendes Gebiet

$f : G \to \mathbb{C}$ sei holomorph bis auf endliche viele Punkte, in denen f stetig ist

γ sei stückweise stetig diff'bare geschlossenen Kurve in G.

$$\boxed{\oint_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0}$$

$\Rightarrow$ Es reicht bei geschlossenen Integralen die Integrale um die Singularitäten zu betrachten.

22.21 Cauchysche Integralformel

f holomorph auf Gebiet G. γ eine einfach geschlossene stückweise stetig diff'bare Kurve in G.

$$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z} \qquad \forall z_0 \in D$$

22.22 Potenzreihenentwicklung

f holomorph auf Gebiet G mit $K(z_0,r) \in G$. Für jedes $z \in K(z_0,r)$ gilt: $\rho \in (0,r)$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k \qquad a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\substack{|\xi-z_0| \\ =\rho}} \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{k+1}}\mathrm{d}\xi$$

22.23 Laurentreihe

$$\boxed{f(z) = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k(z-z_0)^k}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k}_{\text{Nebenteil}}}$$

22.24 Konvergenz der Laurentreihe

$$\boxed{R_\pm = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_{\pm k}|}}} \qquad r_\pm = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_{\pm k}|}$$

Hauptteil konvergent für $|z-z_0|^{-1} < R_-$ $\quad (r_- < |z-z_0|)$

Nebenteil konvergent für $|z-z_0| < R_+$

Gesamt konvergent bei $z \in A(z_0, r_-, R_+)$

22.25 Singularitäten

$z_0 \in \mathbb{C} \setminus G$ heißt isolierte Singularität, falls eine Umgebung um z_0 ganz in G liegt.

1. z_0 heißt hebbare Singularität, falls $a_k = 0 \ \ \forall k < 0$
2. z_0 heißt Polstelle der Ordnung $p \in \mathbb{N}$, falls $a_{-p} \neq 0$ und $a_{-k} = 0 \ \ \forall k > p$
3. z_0 heißt wesentliche Singularität, falls $a_k \neq 0$ für unendliche viele $k < 0$

(Für die Bezeichnungen vergleiche ab 22.22)

22.26 Residuum

Der Laurentkoeffizient a_{-1} heißt Residuum von f in z_0.

$$\boxed{\operatorname{Res}(f,z_0) := a_{-1}}$$

22.27 Bestimmung von Residuen

1. Koeffizient a_{-1} der Laurentreihe
2. $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)} \quad g(z_0) \neq 0 \quad h'(z_0) \neq 0 \qquad \underbrace{g,h}_{\substack{\text{holom. auf} \\ K(z_0,r)}}$

   $$\Rightarrow \boxed{\operatorname{Res}(f,z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}}$$
3. z_0 ist Polstelle der Ordnung p:

   $$\boxed{\operatorname{Res}(f,z_0) = \frac{1}{(p-1)!}\lim_{z\to z_0}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^{p-1}\left[(z-z_0)^p f(z)\right]}$$

22.28 Residuensatz

f holomorph auf G $\qquad$ γ eine „normale" Kurve in $\hat{G}$

$\hat{G} := G \cup \{z_l\}$ $\qquad$ z_l Singularitäten innerhalb von γ

$$\Rightarrow \boxed{\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_l \operatorname{Res}(f,z_l)}$$

Stichwortverzeichnis