

Protokoll: Eigenschwingungen

Versuchstag: 15.06.2009

Kathrin Ender, Michael Walz

Gruppe 101

Inhaltsverzeichnis

A Grundlagen	3
1 Ziel des Versuches	3
2 Akustik	3
2.1 Wie lautet die DGL für einen akustischen Hohlraum	3
2.2 Wie lauten die Randbedingungen für eine Kugel, einen Zylinder und einen Quader?	3
2.3 Welche Funktionssysteme benötigt man zur Lösung der DGL in diesen drei Fällen?	4
2.4 Wie lauten die Eigenfunktionen und die Energieeigenwerte des quaderförmigen Hohlraums?	4
2.5 Wie kann man die Anzahl der Eigenschwingungen pro Frequenzintervall (Oszillator-dichte) abzählen?	5
2.6 Wozu benötigt man die Oszillator-dichte?	6
2.6.1 Beispiel: Planck'sches Strahlungsgesetz	6
3 Elektrodynamik	6
4 Quantenmechanik	7
B Experiment	7
5 Aufbau	7
C Auswertung	8
6 Zur Auswertung	8
7 Eichung	8
8 Frequenzspektrum	9
9 Schallgeschwindigkeit	10
10 Oszillator-dichte	11
11 Ortsabhängigkeit der Druckamplitude	12
11.1 Eigenschwingung bei 430Hz	13
11.2 Eigenschwingung bei 728Hz	14
11.3 Eigenschwingung bei 1048Hz	15

Teil A

Grundlagen

1 Ziel des Versuches

In diesem Versuch sollen die akustischen Eigenschwingungen eines quaderförmigen Hohlraums untersucht werden. Dazu werden sowohl die Resonanzen im Frequenzspektrum als auch die Ortsabhängigkeit der Druckamplitude bei diesen Resonanzen genauer untersucht.

Die theoretischen Grundlagen der akustischen Schwingungen weisen viele Gemeinsamkeiten mit Schwingungen in der Elektrodynamik und Quantenmechanik auf. Daher werden diese Gebiete in der Vorbereitung auch kurz ansprechen.

2 Akustik

2.1 Wie lautet die DGL für einen akustischen Hohlraum

Die Ausbreitung von Druck- bzw. Dichteschwankungen in einem Medium bezeichnet man als Schallwelle. In unserem Versuch breiten sich die Schallwellen in Luft aus, d.h. es handelt sich um Druckschwankungen und die Welle ist longitudinal polarisiert. Anstelle des Druckes kann man auch das sogenannte Geschwindigkeitspotential Φ zur Beschreibung verwenden.

$$p = -\rho_0 \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

ρ_0 bezeichnet dabei die mittlere Dichte der Luft.

Für das Geschwindigkeitspotential gilt die folgende Wellengleichung:

$$\Delta \Phi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi = 0 \quad v = \text{Schallgeschwindigkeit}$$

Um diese DGL zu lösen kann man die Zeitabhängigkeit abseparieren:

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}, t) &= \Phi_S(\vec{r}) \cdot e^{i\omega t} & \Phi_S(\vec{r}) \text{ ist dabei die stationäre Lösung} \\ \Rightarrow \Delta \Phi_S + k^2 \Phi_S &= 0; & \text{mit } k = \frac{\omega}{v} \end{aligned}$$

2.2 Wie lauten die Randbedingungen für eine Kugel, einen Zylinder und einen Quader?

Es ist klar, dass der Druck am Rand des Hohlraums ein Maximum haben muss. Die Normalkomponente der Schallschnelle \vec{v} , die als negativer Gradient des Geschwindigkeitspotentials definiert ist, muss verschwinden.

$$\vec{v} = -\vec{\nabla} \Phi \quad \text{Randbedingung:} \quad \vec{v} \cdot \vec{n}|_{\text{Rand}} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{n}} \right|_{\text{Rand}} = 0$$

Einen kugelförmigen Hohlraum beschreibt man natürlich am einfachsten in Kugelkoordinaten, der Normalenvektor wird dann durch den Einheitsvektor \vec{e}_r in r-Richtung gegeben. Für einen Zylinder verwendet man natürlich Zylinderkoordinaten, wobei der Normalenvektor auf der Mantelfläche durch \vec{e}_r und auf der Grundfläche durch \vec{e}_z gegeben ist. Bei einem Quader verwendet man Kartesische Koordinaten und die entsprechenden Einheitsvektoren \vec{e}_x, \vec{e}_y und \vec{e}_z als Normalenvektoren.

2.3 Welche Funktionssysteme benötigt man zur Lösung der DGL in diesen drei Fällen?

Für die Lösungen zu den drei Fällen benötigt man orthonormierte Funktionssysteme.

- Für eine Kugel ist dieses Funktionssystem durch die sogenannten Kugelflächenfunktionen $Y_{l,m}$ geben:

$$\Phi_S = Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{2} \cdot \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_{lm}(\cos \theta) \cdot e^{im\varphi}$$

Wobei P_{lm} die assoziierten Legendre-Polynome sind:

$$P_{\ell,m}(x) = \frac{(-1)^m}{2^\ell \ell!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}} (x^2-1)^\ell$$

- Für einen Zylinder benötigt man die Besselfunktionen:

$$J_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+n}}{\Gamma(n+r+1)r!}$$

- Für einen Quader verwendet man am besten komplexe e-Funktionen in kartesischen Koordinaten.

2.4 Wie lauten die Eigenfunktionen und die Energieeigenwerte des quaderförmigen Hohlraums?

Für einen quaderförmigen Hohlraum mit den Ausdehnungen: a in x-Richtung, b in y-Richtung und c in z-Richtung erhält man unter einbeziehung der Randbedingung folgende stationäre Lösung:

$$\Phi_S = \Phi_0 \cdot \cos\left(\frac{h\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{k\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{l\pi z}{c}\right); \quad h, k, l \in \mathbb{N}$$

Für die Eigenfrequenzen des Raumes ergibt sich damit:

$$f_{h,k,l} = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{h}{a}\right)^2 + \left(\frac{k}{b}\right)^2 + \left(\frac{l}{c}\right)^2}$$

Jede mögliche Kombination der Indizes h, k, l entspricht einer anderen Eigenschwingung. Rechnet man mit $v = 340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ so erhält man folgende theoretische Werte:

h	k	l	f in Hz	h	k	l	f in Hz
1	0	0	425,00	4	0	0	1700,00
0	1	0	566,67	3	2	0	1705,89
1	1	0	708,33	1	0	2	1752,32
0	0	1	850,00	1	3	0	1752,32
2	0	0	850,00	0	1	2	1791,96
1	0	1	950,33	4	1	0	1791,96
0	1	1	1021,57	1	1	2	1841,67
2	1	0	1021,57	2	0	2	1900,66
1	1	1	1106,45	0	3	1	1900,66
0	2	0	1133,33	2	3	0	1900,66
2	0	1	1202,08	4	0	1	1900,66
1	2	0	1210,40	3	2	1	1905,93
3	0	0	1275,00	1	3	1	1947,59
2	1	1	1328,95	2	1	2	1983,33
3	1	0	1395,25	4	1	1	1983,33
2	2	0	1416,67	0	2	2	2043,15
0	2	1	1416,67	4	2	0	2043,15
1	2	1	1479,04	2	3	1	2082,07
3	0	1	1532,36	1	2	2	2086,88
3	1	1	1633,78	3	3	0	2125,00
2	2	1	1652,10	3	0	2	2125,00
0	0	2	1700,00	3	1	2	2199,26
0	3	0	1700,00				

2.5 Wie kann man die Anzahl der Eigenschwingungen pro Frequenzintervall (Oszillatordichte) abzählen?

Zur Berechnung der Oszillatordichte bzgl. der Frequenz stellt man zuerst fest, dass die Wellenvektoren k gequantelt sind. Aus der statistischen Physik ist bekannt, dass der Abstand zwischen zwei Wellenvektoren in einer Dimension $\frac{2\pi}{L}$ ($L \in \{a, b, c\}$) beträgt.

In drei Dimensionen nimmt ein Zustand also ein virtuelles Volumen im k -Raum von $\frac{(2\pi)^3}{V}$ ($V = a \cdot b \cdot c$) ein.

Definiert man einen maximalen Wellenvektor als Fermiwellenvektor k_F , so ergibt sich in n Dimensionen für die Anzahl der Zustände N mit Wellenvektoren $k \leq k_F$:

$$N = \frac{\frac{1}{n}\omega_n \cdot k_F^n}{\frac{(2\pi)^n}{V_n}}$$

Dabei bezeichnet ω_n die Oberfläche der Einheitskugel in n Dimensionen, $\frac{1}{n}\omega_n$ das Volumen der Einheitskugel in n Dimensionen und V_n das „Volumen“ in n Dimensionen¹.

Für die Oszillatordichte gilt dann:

$$\frac{dN}{dk} = V_n \cdot \frac{\omega_n \cdot k^{n-1}}{(2\pi)^n}$$

Betrachtet man nun nur, dass $ck = \omega = 2\pi f$ gilt, so erhält man:

$$\frac{dN}{df} \cdot \underbrace{\frac{dk}{c}}_{\frac{1}{2\pi}} = V_n \cdot \frac{\omega_n \cdot \left(\frac{2\pi}{c}f\right)^{n-1}}{(2\pi)^n}$$

¹ V_2 ist damit die Oberfläche A ; V_1 die Kantenlänge L

$$\Rightarrow \frac{dN}{df} = V_n \cdot \frac{\omega_n}{c^n} \cdot f^{n-1}$$

Gesamtdichte erhält man nun als Summe über die Dimensionen $n = 1, 2, 3$.

$$\Rightarrow \frac{dN}{df} = V \cdot \frac{4\pi}{c^3} \cdot f^2 + A \cdot \frac{2\pi}{c^2} \cdot f + L \cdot \frac{2}{c}$$

Im Versuch werden nur Schwingungen im Volumen betrachtet. Oberflächenschwingungen spielen keine Rolle. Deshalb erwartet man nur den rein quadratischen Term in der Oszillatordichte.

2.6 Wozu benötigt man die Oszillatordichte?

Die Oszillatordichte ist eigentlich immer nützlich, sobald man das System als quasikontinuierlich betrachten kann. Wenn also die Abstände $\Delta k = \frac{2\pi}{L}$ klein gegenüber dem Maximalen Wert k_F sind.

2.6.1 Beispiel: Planck'sches Strahlungsgesetz

Mit den obigen Herleitungen lässt sich das Plancksche Strahlungsgesetz in kürzester Zeit zusammenbauen. Man erhält für die Dichte der Strahlungsenergie pro Frequenz:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{df} &= \underbrace{2}_{\text{Anzahl der Licht-}} \cdot \underbrace{\frac{4\pi}{c^3} \cdot f^2}_{\text{Anzahl Moden}} \cdot \underbrace{hf}_{\text{Energie pro}} \cdot \underbrace{\frac{1}{e^{\frac{hf}{k_B T}} - 1}}_{\text{Thermische Besetzungswahrscheinlichkeit}} \\ &= \frac{8\pi hf^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{hf}{k_B T}} - 1} \end{aligned}$$

3 Elektrodynamik

Aus den Maxwell Gleichungen lassen sich für den ladungs- und stromfreien Raum die Wellengleichungen für das \vec{E} und \vec{B} -Feld herleiten:

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{Bmatrix} = 0$$

Analog zur Akustik kann man auch hier eine stationäre Lösung finden. Die Randbedingung ist in diesem Fall, dass die Tangentialkomponente des \vec{E} -Feldes und die Normalenkomponente des \vec{B} -Feldes verschwinden müssen:

$$\text{auf dem Rand: } \vec{n} \times \vec{E} = 0 \quad \text{und} \quad \vec{n} \cdot \vec{B} = 0$$

Mit dieser Randbedingung erhält man für das elektrische Feld:

$$\vec{E} = E_0 \cdot \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{n_a \pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n_b \pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{n_c \pi z}{c}\right) \\ \sin\left(\frac{n_a \pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n_b \pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{n_c \pi z}{c}\right) \\ \sin\left(\frac{n_a \pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n_b \pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{n_c \pi z}{c}\right) \end{pmatrix} \cdot e^{i\omega t}$$

Das B-Feld lässt sich berechnen über die Beziehung:

$$\nabla \times E = -i\omega B$$

Für die Eigenfrequenzen gilt:

$$\omega = c\pi \cdot \sqrt{\left(\frac{n_a}{a}\right)^2 + \left(\frac{n_b}{b}\right)^2 + \left(\frac{n_c}{c}\right)^2}$$

4 Quantenmechanik

Um in der Quantenmechanik ein Teilchen im dreidimensionalen Potentialkasten zu beschreiben, geht man von der stationären Schrödingergleichung aus:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}) = H\Psi(\vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(\vec{r}) + V(\vec{r})\Psi(\vec{r})$$

Wobei für das Potential gilt:

$$V = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < x < a \quad \wedge \quad 0 < y < b \quad \wedge \quad 0 < z < c \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Eigenfunktionen sind gegeben durch:

$$\Psi(\vec{r}) = \sqrt{\frac{8}{abc}} \cdot \sin\left(\frac{n_a \pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n_b \pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{n_c \pi}{c} z\right)$$

Für die Eigenenergien gilt:

$$E_{n_a, n_b, n_c} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \cdot \left[\left(\frac{n_a}{a}\right)^2 + \left(\frac{n_b}{b}\right)^2 + \left(\frac{n_c}{c}\right)^2 \right]$$

Wenn für unterschiedliche Indize Werte n_a, n_b, n_c die selbe Eigenenergie auftritt, so spricht man von Energieentartung.

Teil B

Experiment

5 Aufbau

Das Experiment besteht aus einem Metalquader der Kantenlängen $a = 40 \text{ cm}$, $b = 30 \text{ cm}$, $c = 20 \text{ cm}$. Über eine Frequenzgeber, können bestimmte Schallfrequenzen erzeugt werden und mittel eines Druckmessgeräts die Druckamplitude gemessen werden. Das ganze wird an ein Voltmeter und daran ein Plotter angeschlossen. So konnte im ersten Teil, der Verlauf der Resonanz-Peaks mit dem Plotter aufgezeichnet werden (s. Anhang). Zur Untersuchung der Ortsabhängigkeit wurden dann von Hand die Spannungswerte des Voltmeters abgeschrieben (ebenfalls im Anhang).

Teil C

Auswertung

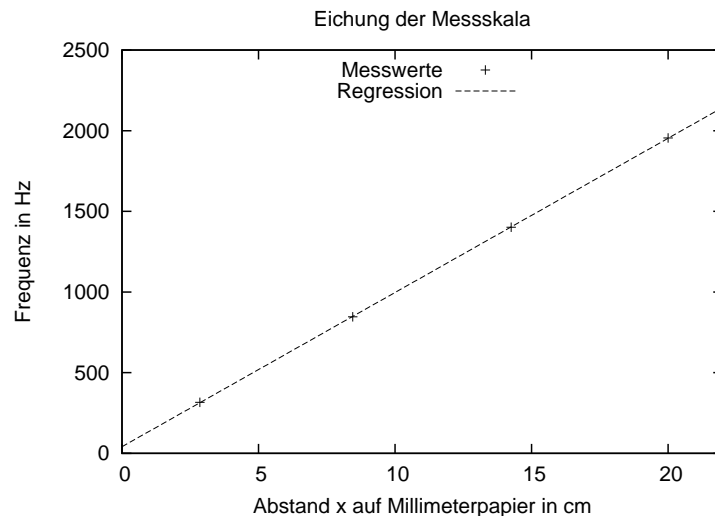
6 Zur Auswertung

Alle Messwerte befinden sich im handgeschrieben angehängten Versuchsprotokoll. Diese Werte wurden am Computer abgetippt und dem Programm GNUPLOT² zur Graphenerstellung übergeben.

Die meisten Messwerte mussten aufgrund der Ablesekalen (oder aus sonstigen Gründen) noch umgerechnet werden. Aufgrund des massiven Rechenaufwandes erledigten wir dies direkt am Computer entweder mit GNUPLOT oder mit einer Tabellenkalkulation. Unter GNUPLOT geschah dies mittels der Option „using“³.

7 Eichung

Wir führten eine Eichung der x-Achse auf dem Millimeterpapier durch, in dem wir an 4 Stellen einen Strich mit Hilfe des Plotters auf das Papier zeichnen und uns dazu die angelegte Frequenz notierten. Durch die 4 Messwerte führten wir eine lineare Regression der Form $f = A \cdot x + B$ aus. Dabei bezeichnet x den Abstand zum Nullpunkte auf dem Millimeterpapier:



Die Regression ergab:

$$A = (95,6 \pm 0,2) \frac{\text{Hz}}{\text{cm}} \quad B = (41,1 \pm 3,2) \text{ Hz}$$

Die Unsicherheit der Frequenz durch die Regression liegt also im Bereich von 3 Hz. Die Ableseungenauigkeit war mir $\Delta x = 1 \text{ mm}$ dagegen deutlich größer.

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = 9,6 \text{ Hz}$$

Die Unsicherheit der Frequenz liegt also mindestens bei 10 Hz.

²<http://www.gnuplot.info/>

³<http://www.gnuplot.info/docs/node133.html>

8 Frequenzspektrum

Anhand der Eichungswerte konnten wir die verschiedenen Resonanzpeaks des Frequenzspektrum vermessen, in dem wir die Abstand x zu Nullmarkierung maßen und in die Regression $f = A \cdot x + B$ einsetzen. Damit ergaben sich die folgenden Frequenzen für die verschiedenen Peaks:

Peak-Nr	Frequenz in Hz	Peak-Nr	Frequenz in Hz
1	428	12	1423
2	581	13	1451
3	729	14	1523
4a	868	15	1571
4b	882	16	1676
5	978	17	1695
6	1050	18	1743
7	1141	19	1795
8	1169	20	1838
9a	1241	21	1886
9b	1250	22a	1948
10	1308	22b	1958
11a	1365	23	2030
11b	1375		

Über einen Vergleich mit den oben berechneten Frequenzen können die Resonanzlinie idiziert werden.

h	k	l	f in Hz theoretisch	f in Hz gemessen	Peak-Nr	h	k	l	f in Hz theoretisch	f in Hz gemessen	Peak-Nr
1	0	0	425,00	428	1	4	0	0	1700,00	}1743{	}18{
0	1	0	566,67	581	2	3	2	0	1705,89		
1	1	0	708,33	729	3	1	0	2	1752,32	}1795{	}19{
0	0	1	850,00	}868, 882{	}4a, 4b{	1	3	0	1752,32		
2	0	0	850,00			978	5	0	1	2	1791,96
1	0	1	950,33	}1050{	}6{	4	1	0	1791,96		
0	1	1	1021,57			1141	7	1	1	2	1841,67
2	1	0	1021,57	1169	8	2	0	2	1900,66	}1948{	}22a{
1	1	1	1106,45	1241	9a	0	3	1	1900,66		
0	2	0	1133,33	1250	9b	2	3	0	1900,66		
2	0	1	1202,08	1308	10	4	0	1	1900,66	1958	22b
1	2	0	1210,40	1365	11a	3	2	1	1905,93	-	-
3	0	0	1275,00	1423	12	1	3	1	1947,59	-	-
2	1	1	1328,95	1451	}13{	2	1	2	1983,33	}2030{	}23{
3	1	0	1395,25	1423		12	4	1	1		
2	2	0	1416,67	}1451{	}13{	0	2	2	2043,15	-	-
0	2	1	1416,67			1523	14	4	2	0	2043,15
1	2	1	1479,04	1571	15	2	3	1	2082,07	-	-
3	0	1	1532,36	1676	16	1	2	2	2086,88	-	-
3	1	1	1633,78	1695	17	3	3	0	2125,00	-	-
2	2	1	1652,10	}1743{	}18{	3	0	2	2125,00	-	-
0	0	2	1700,00			1743	18	3	1	2	2199,26
0	3	0	1700,00								

9 Schallgeschwindigkeit

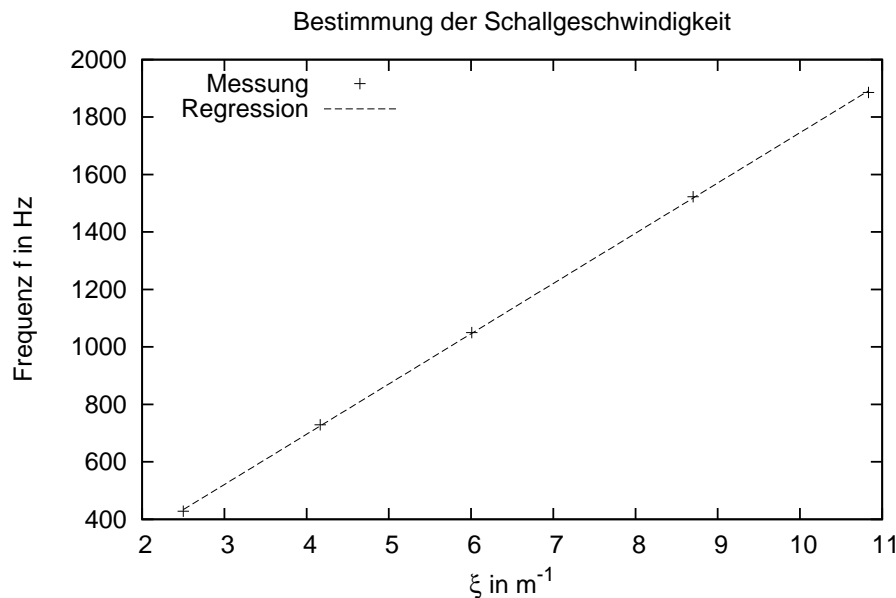
Die Schallgeschwindigkeit wird nun aus den Peaks 1, 3, 6, 14, 21 bestimmt. Der Übersichtlichkeit halber die Daten dieser 5 Peaks nochmals in Tabellenform:

h	k	l	$\xi^2 = \left(\frac{h}{a}\right)^2 + \left(\frac{k}{b}\right)^2 + \left(\frac{l}{c}\right)^2$	f in Hz gemessen	Peak-Nr
1	0	0	6,25 m ⁻²	428	1
1	1	0	17,36 m ⁻²	729	3
0	1	1	36,11 m ⁻²	1050	6
1	2	1	75,69 m ⁻²	1523	14
1	1	2	117,36 m ⁻²	1886	21

Wie oben hergeleitet ergibt sich die Frequenz als:

$$f^2 = \frac{v^2}{4} \left[\left(\frac{h}{a}\right)^2 + \left(\frac{k}{b}\right)^2 + \left(\frac{l}{c}\right)^2 \right] \Rightarrow f = \frac{v}{2} \cdot \xi$$

Die Auftragung und die lineare Regression $f = A \cdot \xi + B$ ergab:



$$A = 174,9 \pm 0,9 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad B = -3,6 \pm 6,2 \text{ Hz}$$

Die Regressionsgerade ist erwartungsgemäß (im Rahmen der Fehlergenauigkeit) eine Ursprungsgerade. Die Schallgeschwindigkeit v ergibt sich damit zu:

$$v = 2 \cdot A = 349,9 \pm 1,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Dieser Wert erscheint bei den geringen Fehlern etwas hoch. In der Regel wird die Schallgeschwindigkeit mit $343 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ bei Standardbedingungen angegeben. Dieser Wert liegt leicht außerhalb der statistischen Fehlergrenzen. Weitere systematische Fehlerquellen im Versuch können gegeben sein durch:

- Fehler bei der Frequenzzeichnung durch Messungenauigkeit der Frequenzmessung
- Deutliche Instabilität der Frequenzen. Oft schwankten die Frequenzen laut Messgeräte um ca. 5Hz.

- Fehler durch mechanische Zeitverzögerung beim Plotter
- Fehler beim Ablesen des Spektrums (ca. 10 Hz, siehe Eichung)
- Abweichungen des Quaders von den angegebenen Maßen
- Effekte durch die Messbohrungen am Quader
- Sonstiger (nicht von uns) produzierter Lärm im Versuchsraum
- Ungenauer Ton des Schallgebers
- ...

10 Oszillatordichte

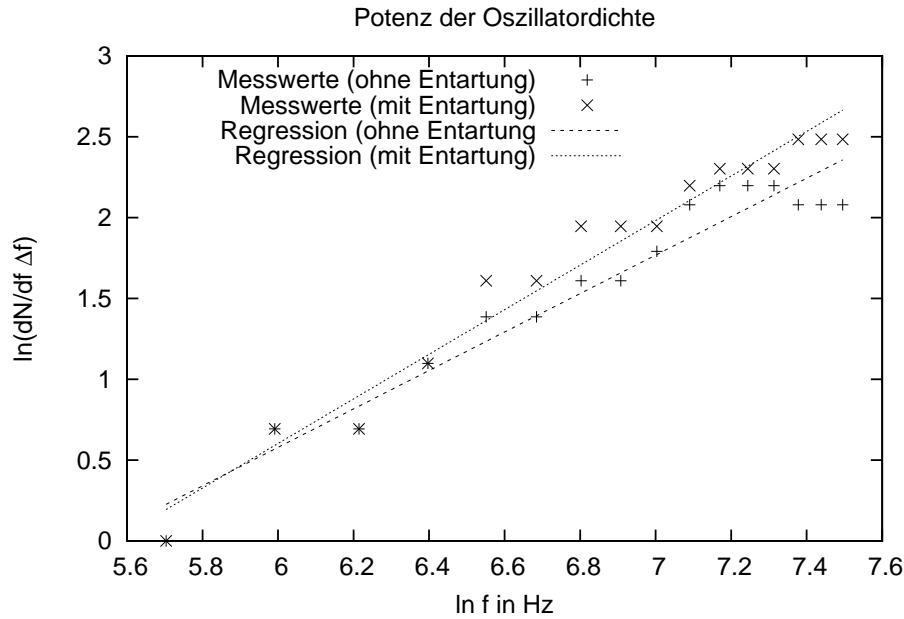
Zur Bestimmung der Oszillatordichte wurden die Resonanzpeaks gezählt. Als Näherungswert für $\left. \frac{dN}{df} \right|_{f=\nu}$ wurde die Anzahl der Resonanzen im Intervall $[\nu - 200 \text{ Hz}, \nu + 200 \text{ Hz}]$ geteilt durch die Breite des Intervalls gewählt.

Damit ergeben sich folgende Werte

Frequenz f in Hz	$\frac{dN}{df} \cdot 400 \text{ Hz}$	Frequenz f in Hz	$\frac{dN}{df} \cdot 400 \text{ Hz}$
100	0	1000	5(+2)
200	0	1100	6(+1)
300	1	1200	8(+1)
400	2	1300	9(+1)
500	2	1400	9(+1)
600	3	1500	9(+1)
700	4(+1)	1600	8(+4)
800	4(+1)	1700	8(+4)
900	5(+2)	1800	8(+6)

Die Werte ohne die Klammern stellt einfach die gezählten Resonanzen dar. In Klammern wurde noch angegeben, um wieviele zusätzliche Zustände die Werte erhöht werden müsste, wenn man die einzelnen (nicht beobachteten) Entartungen mitzählen würde.

Um die Potenz des Anstieges zu bestimmen, trugen die die Oszillatordichte logarithmisch gegen die Frequenz auf:



Für die Regressionen $A \cdot \ln f + B$ ergab sich:

ohne Berücksichtigung der Entartung: $A = 1,19 \pm 0,07$ $B = -6,6 \pm 0,5$

mit Berücksichtigung der Entartung: $A = 1,38 \pm 0,07$ $B = -7,7 \pm 0,5$

Zum einen erkennt man, dass die Berücksichtigung der Entartungen das Ergebnis wesentlich verbessern. Die relativen Fehler „schrumpfen“ etwas. Die Potenz des Anstiegs der Oszillatordichte beträgt in diesen niedrigen Frequenzbereichen also 1,38 und steigt damit langsamer als die Theorie mit einer quadratischen Formel erwarten lässt.

11 Ortsabhängigkeit der Druckamplitude

Außerdem untersuchten wir noch die Ortsabhängigkeit der Druckamplitude in allen drei Raumrichtungen. Dazu lasen wir jeden 1cm die Spannung, die proportional zur Druckamplitude ist ab. Die Frequenz der zu untersuchenden Eigenschwingung stellten wir mit Hilfe des bereits aufgenommenen Frequenzspektrums ein. Wir wählten den ersten ($f=430\text{Hz}$), dritten ($f=728\text{Hz}$) und sechsten ($f=1048\text{Hz}$) Peak. Laut unser obigen Zuordnung entsprechen diese Peaks den folgenden Eigenschwingunge:

- 1.Peak:

$$f = 430\text{Hz} \quad (100)$$

- 2.Peak:

$$f = 728\text{Hz} \quad (110)$$

- 6.Peak:

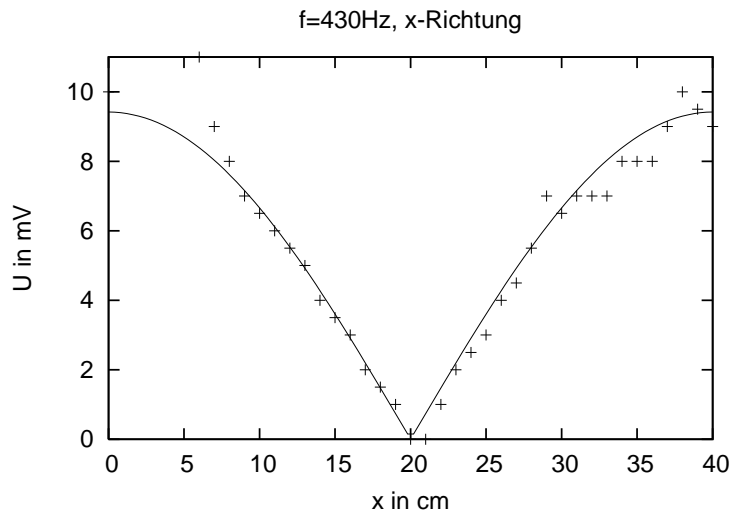
$$f = 1048\text{Hz} \quad (011), (210)$$

Im Folgenden haben wir jeweils unsere Messwerte aufgetragen und an diese Messwerte eine Kurve von der von uns erwarteten Form fitten lassen. Da wir mit der Drucksonde jeweils nur den Betrag der Amplitude gemessen haben, muss auch der Betrag der Wellenfunktion gefittet werden. In den folgenden Bildern sind oft starke Sprünge in den Messwerten zu beobachten.

Dies liegt daran, dass während der Messung die eingestellte Frequenz oft kurzzeitig ansackte oder auch anstieg, d.h. wir zwischendurch leicht neben der Resonanz gemessen haben. Wir hatten jedoch keine Möglichkeit die Frequenz zu stabilisieren. Während der Messung in eine Raumrichtung veränderten wir sie nicht, vor jeder Messung korrigierten wir sie aber gegebenenfalls.

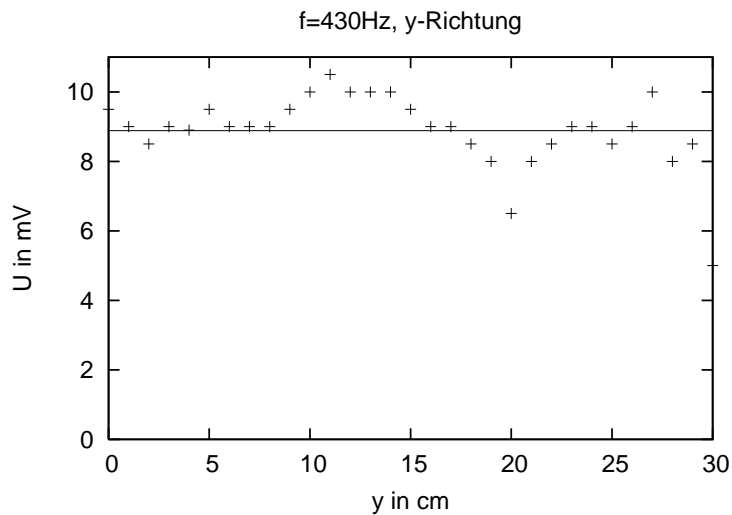
11.1 Eigenschwingung bei 430Hz

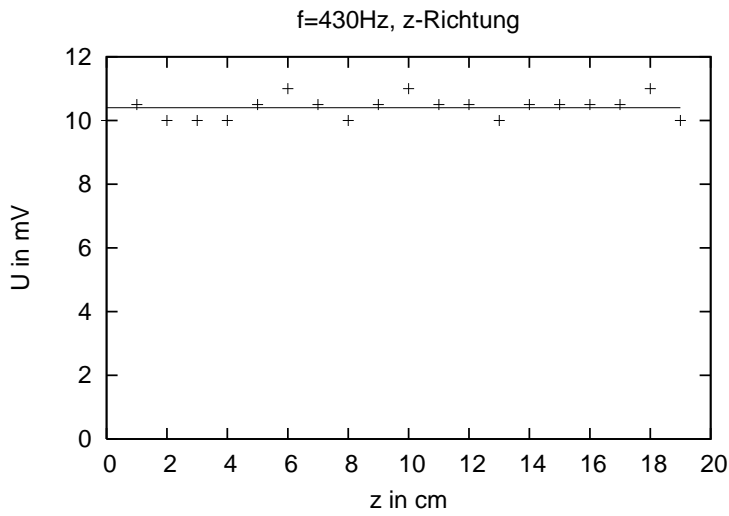
Da es sich bei dieser Resonanz um die Eigenschwingung (100) handelt, erwarten wir eine konstante Druckamplitude in y- und in z-Richtung. Während wir in x-Richtung Bäuche am Rand und einen Nulldurchgang erwarten.



Gefittet an:

$$\left| A \cdot \cos\left(\frac{\pi}{40\text{cm}} \cdot x\right) \right|$$

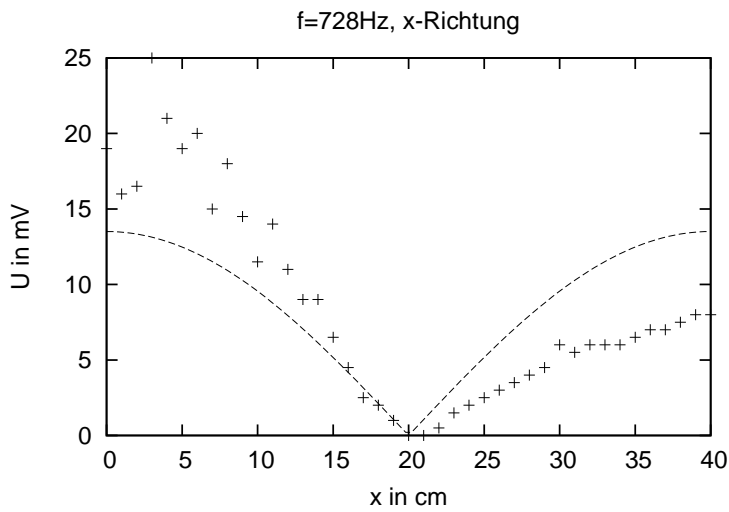




Die Ergebnisse entsprechen in etwa unseren Erwartungen.

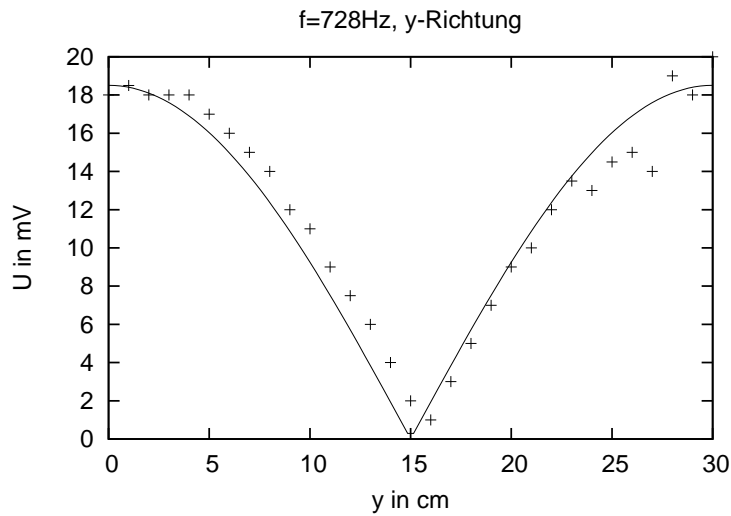
11.2 Eigenschwingung bei 728Hz

Bei dieser Resonanz handelt es sich um die Eigenschwingung (110). Daher erwarten wir in z-Richtung einen konstante Druckamplitude und in x- und y-Richtung Bäuche am Rand und einen Nulldruchgang.



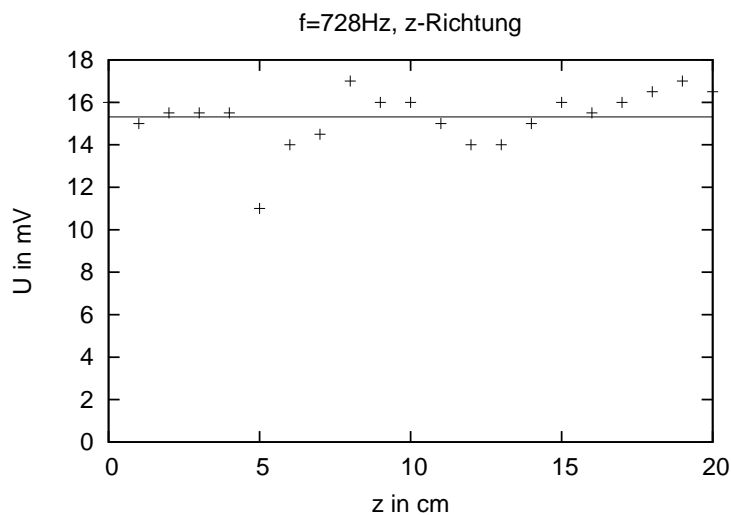
Gefittet an:

$$\left| A \cdot \cos\left(\frac{\pi}{40\text{cm}} \cdot x\right) \right|$$



Gefittet an:

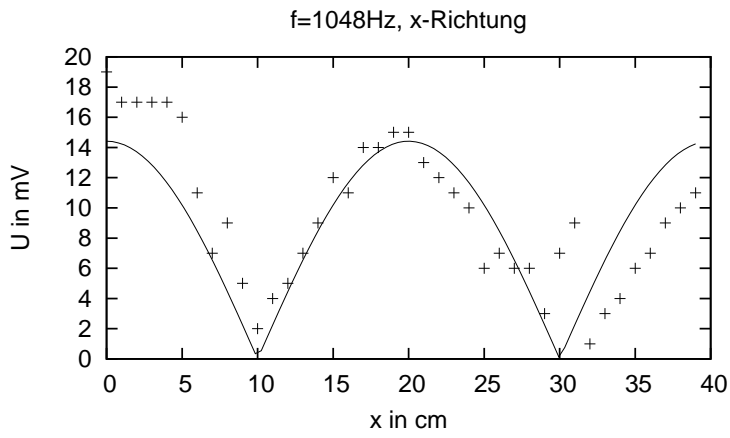
$$\left| A \cdot \cos \left(\frac{\pi}{30\text{cm}} \cdot y \right) \right|$$



Auch für diesen Fall lässt sich unsere Erwartung grob bestätigen. Im Bild für die x-Richtung ist jedoch deutlich zu erkennen, dass auf der rechten Seite des Nulldurchganges die Amplitude viel geringer ist. Dies liegt - wie oben bereits erwähnt- daran, dass die Frequenz während des Versuches nicht stabil blieb.

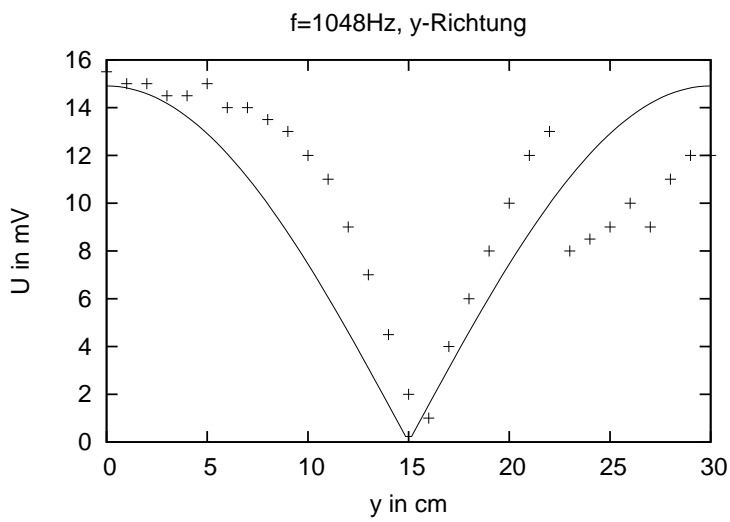
11.3 Eigenschwingung bei 1048Hz

Bei diesem Fall sollte eine Entartung auftreten. Die Resonanz sollte eine Überlagerung aus den beiden Eigenschwingungen (011) und (210) sein. Für (011) würden wir eine konstante Amplitude in x-Richtung erwarten und für die y- und z-Richtung Bäuche am Rand und einen Nulldurchgang. Für (210) würden wir für die x-Richtung Bäuche am Rand und zwei Nulldurchgänge, für die y-Richtung einen Nulldurchgang und für die z-Richtung eine konstanten Amplitude erwarten. Vergleichen wir dies Erwartungen mit unseren Messdaten, so ist nur die (210) Schwingung erkennbar, die (011) jedoch nicht.



Gefittet an:

$$\left| A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{40\text{cm}} \cdot x\right) \right|$$



Gefittet an:

$$\left| A \cdot \cos\left(\frac{\pi}{30\text{cm}} \cdot y\right) \right|$$

